【問題】次の定義域を持つ曲面 $z = xy$ の表面積 S を求めよ.

(i) 原点を中心とする半径 a の円盤.

(ii) $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$ の部分

(iii) $(\frac{1}{2}, 0)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円盤.

((ii) 「理工系学部のための微分積分学テキスト」 (山梨大学工学部基礎教育センター編 学術図書) **第 5 章 演習問題 5-4 2.** (5))

【解答】 曲面 $z = xy$ の面素は $\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}dxdy = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}dxdy$ により与えられる.

(i) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とし，更に $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ として極座標を用いれば

$$S = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}dxdy = \iint_{D'} \sqrt{r^2 + 1}\ |r|drd\theta = 2\pi \int_0^a r\sqrt{r^2 + 1}dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2\pi}{3}\{(a^2 + 1)^{\frac{3}{2}-1}\}$$

(ii) 被積分関数，及び積分領域が $y = x$ に関し対称である事に注意して，$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$ と置く.

$$S = 2\iint_D \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}dxdy = 2\int_0^2 \left(\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2 + 1}dy\right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[y\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + (x^2 + 1)\log|y + \sqrt{x^2 + y^2 + 1}|\right]_0^x dx$$

$$= \underbrace{\int_0^2 x\sqrt{2x^2 + 1}dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_0^2 (x^2 + 1)\log|x + \sqrt{2x^2 + 1}|dx}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\int_0^2 (x^2 + 1)\log\sqrt{x^2 + 1})dx}_{\mathrm{III}}$$

I について： $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{6}(2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{13}{3}.$

II について： 部分積分を実行の後，分母の有理化を行い整理すると

$$\mathrm{II} = \left[\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log|x + \sqrt{2x^2 + 1}|\right]_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\frac{1}{x + \sqrt{2x^2 + 1}}\frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}dx$$

$$= \frac{14}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\int_0^2 \left(x^2 + 2 - \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} + \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}}\right)dx$$

$$= \frac{14}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} + 2x - 2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 1}\right]_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}}dx$$

$$= \frac{14}{3}\log 5 + \frac{2}{3}\tan^{-1}2 - \frac{23}{9} - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{2x}{(x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}}dx$$

最後の項について $t = \sqrt{2x^2 + 1}$ と置換すれば

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 1}\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}dx = \int_1^3 \frac{2}{t^2 + 1}dt = 2\tan^{-1}3 - \frac{\pi}{2}.$$

従って

$$\mathrm{II} = \frac{14}{3}\log 5 + \frac{2}{3}\tan^{-1}2 - \frac{2}{3}\tan^{-1}3 - \frac{23}{9} + \frac{\pi}{6}$$

III について： 部分積分より

$$\mathrm{III} = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2 + 1)\log(x^2 + 1)dx = \frac{1}{6}\left[(x^3 + 3x)\log(x^2 + 1)\right]_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \left(x^2 + 2 - \frac{2}{x^2 + 1}\right)dx$$

$$= \frac{7}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} + 2x - 2\tan^{-1}x\right]_0^2$$

$$= \frac{7}{3}\log 5 - \frac{20}{9} + \frac{2}{3}\tan^{-1}2$$

以上の計算より

$$\begin{aligned}
S &= \frac{13}{3} + \left(\frac{14}{3}\log 5 + \frac{2}{3}\tan^{-1} 2 - \frac{2}{3}\tan^{-1} 3 - \frac{23}{9} + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{7}{3}\log 5 - \frac{20}{9} + \frac{2}{3}\tan^{-1} 2\right) \\
&= 4 + \frac{\pi}{6} + \frac{7}{3}\log 5 - \frac{2}{3}\tan^{-1} 3
\end{aligned}$$

※　$\theta = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} 3$ と置くと $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ より

$$\tan\theta = \cot(2\tan^{-1} 3) = \frac{\cos^2 \tan^{-1} 3 - \sin^2 \tan^{-1} 3}{2\cos\tan^{-1} 3 \cdot \sin\tan^{-1} 3} = \frac{1 - \tan^2\tan^{-1} 3}{2\tan\tan^{-1} 3} = \frac{1-9}{2\cdot 3} = -\frac{4}{3}$$

従って $\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} 3 = -\tan^{-1}\frac{4}{3}$ と表される．これより $S = 4 + \frac{7}{3}\log 5 - \frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{4}{3}$ と表してもよい．　□

【解答】（別解 極座標による）被積分関数，及び積分領域が $y = x$ に関し対称である事に注意して，$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$ と置く．更に極座標により $D' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta}\}$ と表せば

$$\begin{aligned}
S &= 2\iint_D \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dxdy = 2\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dxdy = 2\iint_{D'} \sqrt{r^2+1}|r|drd\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} r\sqrt{r^2+1}dr\right) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{2}{\cos\theta}} d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(4\tan^2\theta + 5)^{\frac{3}{2}} - 1\}d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\tan^2\theta + 5)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

$t = \tan\theta$ と置換する．$d\theta = (t^2+1)^{-1}dt$ より

$$S = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{(4t^2+5)^{\frac{3}{2}}}{t^2+1}dt - \frac{\pi}{6} = \underbrace{\frac{8}{3}\int_0^1 \sqrt{4t^2+5}dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{8}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t^2+5}}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)\sqrt{4t^2+5}}}_{\mathrm{III}} - \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{16}{3}\int_0^1 \sqrt{t^2 + \frac{5}{4}}dt = \frac{8}{3}\left[t\sqrt{t^2+\frac{5}{4}} + \frac{5}{4}\log\left|t + \sqrt{t^2+\frac{5}{4}}\right|\right]_0^1 = 4 + \frac{5}{3}\log 5 \\
\mathrm{II} &= \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{5}{4}}} = \frac{4}{3}\left[\log\left|t + \sqrt{t^2+\frac{5}{4}}\right|\right]_0^1 = \frac{2}{3}\log 5
\end{aligned}$$

III について，$t = \tan\theta$，$s = \sin\theta$ とすれば

$$\mathrm{III} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{5 - \sin^2\theta}}d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{ds}{\sqrt{5 - s^2}} = \frac{2}{3}\left[\sin^{-1}\frac{s}{\sqrt{5}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore\quad S = 4 + \frac{5}{3}\log 5 + \frac{2}{3}\log 5 + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{6} = 4 + \frac{7}{3}\log 5 + \frac{1}{3}\left(2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\theta = 2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2}$ と置く．$1^2 + 3^2 = (\sqrt{10})^2$ 及び $\alpha = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}$ より $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ だから

$$\tan\theta = -\cot(2\alpha) = -\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = -\frac{4}{3} \qquad \therefore\quad 2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2} = -\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

故に $S = 4 + \dfrac{7}{3}\log 5 - \dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{4}{3}$ となる．

(iii)　$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x\}$ とし，更に $D' = \{(r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq \cos\theta\}$ として極座標を用いれば

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{r^2+1}\ |r|drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{r^2+1}dr\right)d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{(\cos^2\theta + 1)^{\frac{3}{2}} - 1\}d\theta = \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}d\theta}_{\mathrm{I}} - \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

以下,

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}},\qquad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta+1}d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos 2\theta+3}d\theta$$

と置く. $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$ と変形すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+3)^{\frac{3}{2}}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2 2\theta+6\cos 2\theta+9)}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}d\theta\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}d\theta+6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos 2\theta+3}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}\right\}\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}d\theta+6\sqrt{2}E-\frac{9\sqrt{2}}{2}K\right\}\end{aligned}$$

従って $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}d\theta=2\sqrt{2}\mathrm{I}+\frac{9\sqrt{2}}{2}K-6\sqrt{2}E$ となる. 再度 I について部分的に $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(\cos 2\theta+1)$ と変形すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=E+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sqrt{\cos^2\theta+1}d\theta\\&=\frac{3}{2}E+\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\sqrt{\cos 2\theta+3}d\theta=\frac{3}{2}E+\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}d\theta \qquad (\text{部分積分より})\\&=\frac{3}{2}E+\frac{1}{8}K-\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta+3}}d\theta=\frac{3}{2}E+\frac{1}{8}K-\frac{\sqrt{2}}{8}(2\sqrt{2}\mathrm{I}+\frac{9\sqrt{2}}{2}K-6\sqrt{2}E)=-\frac{1}{2}\mathrm{I}-K+3E\end{aligned}$$

従って $\mathrm{I}=\dfrac{2}{3}(3E-K)$ となる. K,E は第 1 種, 第 2 種完全楕円積分

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta\qquad(0<k<1)$$

を用いて

$$K=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{2}}{2}K(1/\sqrt{2}),\qquad E=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}d\theta=\sqrt{2}E(1/\sqrt{2})$$

と表されるから, $\mathrm{I}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}(6E(1/\sqrt{2})-K(1/\sqrt{2}))$. 従って表面積は $S=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}(6E(1/\sqrt{2})-K(1/\sqrt{2}))-\dfrac{\pi}{3}$ である. □

〈雑感〉 (i) は極座標変換の簡単な練習問題. (ii) はこの解答を作るきっかけの問題. 微分積分の問題集をいろいろ探してみたが (i) 以外の問題は載っていない (同様の問題が塹江・桑垣・笠原「詳説演習 微分積分学」(培風館 1979) にも載っているが, 積分の処をスルーして答えのみ書いてある). 双曲放物面の表面積の問題は関数自体はシンプルな形なのに, いざ計算しようとすると鬼畜となる. (ii) のように矩形 (正方形) のような簡単な図形の場合であっても, その計算はやたら複雑. 更に (i) の積分領域を少しずらした (iii) では楕円積分という初等関数の範疇を超越したものが出現する始末. こんな問題を誰にやらせるつもりだったんだろぅ・・・.

謝辞 (ii) は五十嵐先生に解答を頂きました. 感謝です!! □

【問題】 1 以上の整数 n について次が成立する事を示せ：

(i)

$$(\tan x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\cos^{n+1} x} \det[A_{ik}]_{i,k=0,\cdots,n}$$

右辺の行列式の成分 A_{ik} は次で与えられる：

$$A_{i0} = \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right), \qquad A_{i1} = \cos\left(x + \frac{i\pi}{2}\right)$$

$$k \geq i+2 \text{ ならば } A_{ik} = 0, \qquad \text{その他は } A_{ik} = \binom{i}{k-1} \cos\left(x + \frac{(i-k+1)\pi}{2}\right)$$

(ii)

$$(\cot x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin^{n+1} x} \det[B_{ik}]_{i,k=0,\cdots,n}$$

右辺の行列式の成分 A_{ik} は次で与えられる：

$$B_{i0} = \cos\left(x + \frac{i\pi}{2}\right), \qquad B_{i1} = \sin\left(x + \frac{i\pi}{2}\right)$$

$$k \geq i+2 \text{ ならば } B_{ik} = 0, \qquad \text{その他は } B_{ik} = \binom{i}{k-1} \sin\left(x + \frac{(i-k+1)\pi}{2}\right)$$

(iii)

$$(\sec x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\cos^{n+1} x} \det[C_{ik}]_{i,k=1,\cdots,n}$$

右辺の行列式の成分 C_{ik} は次で与えられる：

$$k \geq i+2 \text{ ならば } C_{ik} = 0, \qquad \text{その他は } C_{ik} = \binom{i}{k-1} \cos\left(x + \frac{(i-k+1)\pi}{2}\right)$$

(iv)

$$(\mathrm{cosec} x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{\sin^{n+1} x} \det[D_{ik}]_{i,k=1,\cdots,n}$$

右辺の行列式の成分 D_{ik} は次で与えられる：

$$k \geq i+2 \text{ ならば } D_{ik} = 0, \qquad \text{その他は } D_{ik} = \binom{i}{k-1} \sin\left(x + \frac{(i-k+1)\pi}{2}\right)$$

(**森口・宇田川・一松「数学公式 I」(岩波書店 1956)** p.37) [*1]

$\tan x$ について $n = 1, 2, 3$ の場合に確かめてみる．$n = 1$ のとき，

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \frac{-1}{\cos^2 x} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$n = 2$ のとき，左辺は $\tan'' x = 2\tan x + 2\tan^3 x = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$．一方，右辺は

$$\frac{1}{\cos^3 x} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x & -2\sin x \end{vmatrix} = \frac{2\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

[*1] 初版本では右辺の $(-1)^n$ が $(-1)^{n+1}$ となっている．$(-1)^n$ の方が正しい．改訂版は確認していないので分からない．

$n=3$ のとき，左辺は $(\tan x)^{(3)}=2+8\tan^2 x+6\tan^4 x=-\dfrac{4}{\cos^2 x}+\dfrac{6}{\cos^4 x}$．一方，右辺について最後列に関する余因子展開を施し，$n=2$ のときの計算と併せれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^3}{\cos^4 x}\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ \cos x & -\sin x & \cos x & 0 \\ -\sin x & -\cos x & -2\sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x & -3\cos x & -3\sin x \end{vmatrix} \\
=&\frac{1}{\cos^3 x}\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x & -3\cos x \end{vmatrix}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & \cos x \\ -\sin x & -\cos x & -2\sin x \end{vmatrix} \\
=&\frac{1}{\cos^3 x}\left(-\cos x\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}-3\cos x\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}\right)+\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x}=-\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{6}{\cos^4 x}
\end{aligned}
$$

確かに $n=1,2,3$ については確認できる．(ちなみに $n=4,5$ の場合,

$$
(\tan x)^{(4)}=16\tan x+40\tan^3 x+24\tan^5 x,\qquad (\tan x)^{(5)}=16+136\tan^2 x+240\tan^4 x+120\tan^6 x
$$

となるのだが，これ以上は不毛なので，ここで終了.)

上の公式は次の一般の場合に帰着される：

【問題】C^∞ 級関数 f,g，及び任意の自然数 n について次が成立する事を示せ：

$$
\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{g^{n+1}}\begin{vmatrix}
f & g & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
f^{(1)} & g^{(1)} & g & 0 & \cdots & & \\
f^{(2)} & g^{(2)} & 2g^{(1)} & g & \cdots & & \\
 & & & & \ddots & & \\
f^{(n-2)} & g^{(n-2)} & \binom{n-2}{1}g^{(n-3)} & \binom{n-2}{2}g^{(n-4)} & \cdots & g & 0 \\
f^{(n-1)} & g^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}g^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}g^{(n-3)} & \cdots & \binom{n-1}{n-2}g^{(1)} & g \\
f^{(n)} & g^{(n)} & \binom{n}{1}g^{(n-1)} & \binom{n}{2}g^{(n-2)} & \cdots & \binom{n}{n-2}g^{(2)} & \binom{n}{n-1}g^{(1)}
\end{vmatrix}
$$

(**N.Bourbaki 「数学原論」(実一変数関数 1)** (東京図書 1968) p.31)

解答に移る前に，$n=1,2,3$ の場合に予備考察を行う．$n=1$ の場合，商の微分の公式の分子の形より

$$
\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{v^2}=-\frac{1}{g^2}\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}
$$

と纏める事が出来る．次に $n=2$ の場合,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)''&=-\frac{1}{g^3}\left(v\begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix}'-2v'\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\right) \\
&=-\frac{1}{g^3}\left(g\begin{vmatrix} f' & g' \\ f' & g' \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix}-2g'\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\right)=-\frac{1}{g^3}\left(0+g\begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix}-2g'\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\right) \\
&=-\frac{1}{g^3}\left(-0\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}+v\begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix}-2v'\begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}\right)=\frac{(-1)^2}{g^3}\begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

中盤のところで形を合わせる為に $0=0\begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}$ とした処の無理矢理感が否めない．更に $n=3$ のとき,

$$
\left(\frac{f}{g}\right)'''=\frac{(-1)^2}{g^4}\left(\underbrace{g\begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} f & v & 0 \\ f'' & g'' & g' \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix}}_{\text{①}}+g\begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f''' & g''' & 2g'' \end{vmatrix}-3g'\begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{①}{g} &= \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & 0 & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f'' & g'' & g' \\ 0 & 0 & g' \end{vmatrix} = -f'gg'' + f''gg' + fg'g'' - f''gg' \\
&= (fg' - f'g)g'' = g'' \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ 0 & 0 & g'' \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad \left(\frac{f}{g}\right)''' &= \frac{(-1)^3}{g^4} \left\{ -v \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ 0 & 0 & g'' \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & v \\ f''' & g''' & 2g'' \end{vmatrix} + 3g' \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix} \right\} \\
&= \frac{(-1)^3}{g^4} \left\{ -g \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f''' & g''' & 3g'' \end{vmatrix} + 3g' \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix} \right\} \\
&= \frac{(-1)^3}{g^4} \left\{ -0 \begin{vmatrix} f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \\ f''' & g''' & 3g'' \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f'' & g'' & 2g' \\ f''' & g''' & 3g'' \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f''' & g''' & 3g'' \end{vmatrix} + 3g' \begin{vmatrix} f & g & 0 \\ f' & g' & g \\ f'' & g'' & 2g' \end{vmatrix} \right\} \\
&= \frac{(-1)^3}{g^4} \begin{vmatrix} f & g & 0 & 0 \\ f' & g' & g & 0 \\ f'' & g'' & 2g' & g \\ f''' & g''' & 3g'' & 3g' \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

帰納法によって証明をする場合，中盤にあるような ① の処理を行わなければいけない．実験的に $n = 4, 5$ の場合について計算すると或る種の法則性は確認できるが，この法則性を一般の場合に証明する事は非常に厳しい．即ち，

帰納法を使わない

というのが正解! これが何故行列式で書かれているか，という事を考えれば答えは次の通り：

【解答】 $h = f/g$ とする．Leibniz の法則より

$$
f^{(k)} = g^{(k)}h + \binom{k}{1} g^{(k-1)} h^{(1)} + \binom{k}{2} g^{(k-2)} h^{(2)} + \cdots + + \binom{k}{k-1} g^{(1)} h^{(k-1)} + g h^{(k)}
$$

$$
\begin{bmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \\ f^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ g' & g & \cdots & 0 & 0 \\ g'' & 2g' & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ g^{(n-1)} & \binom{n-1}{1} g^{(n-2)} & \cdots & g & 0 \\ g^{(n)} & \binom{n}{1} g^{(n-1)} & \cdots & \binom{n}{1} g^{(n-1)} g^{(1)} & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ h^{(1)} \\ h^{(2)} \\ \vdots \\ h^{(n-1)} \\ h^{(n)} \end{bmatrix}
$$

となる．右辺の $n+1$ 次正方行列の行列式の値は g^{n+1} だから，Cramér の公式より

$$
h^{(n)} = \frac{1}{g^{n+1}} \begin{vmatrix} g & 0 & \cdots & 0 & f \\ g' & g & \cdots & 0 & f' \\ g'' & 2g' & \cdots & 0 & f'' \\ & & \ddots & & \\ g^{(n-1)} & \binom{n-1}{1} g^{(n-2)} & \cdots & g & f^{(n-1)} \\ g^{(n)} & \binom{n}{1} g^{(n-1)} & \cdots & \binom{n}{1} g^{(n-1)} g^{(1)} & f^{(n)} \end{vmatrix}
$$

分子の行列式に於いて第 $n+1$ 列を第 1 列に移動すれば

$$
h^{(n)} = \frac{(-1)^n}{g^{n+1}} \begin{vmatrix} f & g & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ f' & g' & g & \cdots & 0 & 0 \\ f'' & g'' & 2g' & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ f^{(n-1)} & g^{(n-1)} & \binom{n-1}{1} g^{(n-2)} & \cdots & \binom{n-1}{1} g^{(1)} & g \\ f^{(n)} & g^{(n)} & \binom{n}{1} g^{(n-1)} & \cdots & \binom{n}{2} g^{(n-2)} g^{(2)} & \binom{n}{1} g^{(n-1)} \end{vmatrix}.
$$

□

この公式に当て嵌めれば最初の問題の解答が得られる．例えば $\cot x$ の場合について書けば $k \geq 1$, $i+2>k$ のときの (i,k) 成分 B_{ik} は

$$B_{ik} = \binom{i}{k-1}(\sin x)^{(i+k-1)} = \binom{i}{k-1}\sin\left(x + \frac{(i+k-1)\pi}{2}\right)$$

となる．