

【問題】 2変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + y^2 - 1$ および xy 平面上において $f(x, y) = 0$ が定める曲線 C を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ。
- (2) 曲線 C 上の点 $(2, 3)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) $f(x, y) = 0$ が点 $(2, 3)$ の近くで定める陰関数 $y = \varphi(x)$ について $\varphi''(2)$ を求めよ。

(2024 電気通信大情報理工学域)

【解答】 (1) $f_x = 4x^3 - 4y, f_y = -4x + 2y$. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ならば $(a, b) = (0, 0), (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.
 $f_{xx} = 12x^2, f_{xy} = -4, f_{yy} = 2$. $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 24x^2 - 16 = 8(3x^2 - 1)$ とすると

$\Delta(0, 0) < 0$ より $f(0, 0)$ は極値ではない。
 $\Delta(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) > 0, f_{xx}(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) > 0$ より $f(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$ は極小値である。

以上より $f(x, y)$ は極小値 $f(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) = -5$ をとる。

- (2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{2(x^3 - y)}{2x - y}$ より接線の方程式は $y - 3 = \frac{2(2^3 - 3)}{2 \cdot 2 - 3}(x - 2), y = 10x - 17$.
- (3) 上の計算より $(x, y) = (2, 3)$ のとき $2x - y = 1, \varphi'(2) = 10$ だから

$$\varphi''(x) = 2 \frac{(3x^2 - y')(2x - y) - (x^3 - y)(2 - y')}{(2x - y)^2}, \quad \varphi''(2) = 2\{(3 \cdot 4 - 10) \cdot 1 - (2^3 - 3)(2 - 10)\} = 84.$$

□

【問題】 以下の問いに答えよ。

(I) 次の重積分の値を求めよ。

$$(1) I_1 = \iint_{D_1} x^2 dx dy \quad (D_1 = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1\})$$

$$(2) I_2 = \iint_{D_2} ye^{y-x^2} dx dy \quad (D_2 = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq \sqrt{2}x\})$$

(II) 次の広義積分の値を求めよ。

$$J = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 5e^{-x} + 2}$$

(2024 電気通信大情報理工学域)

【解答】 (I) (1) $x = r \cos \theta, y = \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta$ とすれば

$$D_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \left| \begin{array}{cc} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta & \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta \end{array} \right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} r^2 \cos^2 \theta \cdot \left| \frac{r}{\sqrt{2}} \right| dr d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \end{aligned}$$

(2) $D_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq y \leq \sqrt{2}x\}$ より

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^2} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{2}x} ye^y dy \right) dx = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^2} \left[(y-1)e^y \right]_{x^2}^{\sqrt{2}x} dx = \int_0^{\sqrt{2}} ((\sqrt{2}x-1)e^{\sqrt{2}x-x^2} - (x^2-1)) dx$$

$t = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ と置けば $0 \rightarrow x \rightarrow \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ より

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{2}x-1)e^{\sqrt{2}x-x^2} dx &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-\sqrt{2}t)e^{-t^2+\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-2t)e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{2}e \left[e^{-t^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}(1 - \sqrt{e}) \end{aligned}$$

(II) $t = e^x$ と置く.

$$\begin{aligned} J &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dt}{t^2 + 2t + 5} = \frac{1}{4} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{dt}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{\frac{R+1}{2}} \frac{ds}{s^2 + 1} \quad (s = \frac{t+1}{2} \text{ と置く}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\tan^{-1} \frac{R+1}{2} - \tan^{-1} 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

□

【問題】 関数 $f(x, y) = \frac{\cos(2x + 4y)}{1 - 3x + 2y}$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, 1)$ における接平面の方程式を求めよ。
 (2) $f(x, y)$ の Maclaurin 展開

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$$

に現れる x の係数 a_{10} 及び y^2 の係数 a_{02} を求めよ。

(2023 電気通信大情報理工学域)

【解答】 (1)

$$f_x = \frac{-2(1 - 3x + 2y) \sin(2x + 4y) - (-3) \cos(2x + 4y)}{(1 - 3x + 2y)^2}, \quad f_x(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = 3,$$

$$f_y = \frac{-4(1 - 3x + 2y) \sin(2x + 4y) - 2 \cos(2x + 4y)}{(1 - 3x + 2y)^2}, \quad f_y(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) = -2$$

よって接平面の方程式は $z - 1 = 3(x - \frac{\pi}{2}) - 2(y - \frac{3\pi}{4})$, $z = 3x - 2y + 1$.

(2) $a_{10} = f_x(0, 0) = 3$.

$$f_{yy} = \frac{-16(1 - 3x + 2y)^2 \cos(2x + 4y) + 16(1 - 3x + 2y) \sin(2x + 4y) + 8 \cos(2x + 4y)}{(1 - 3x + 2y)^4}, \quad a_{02} = \frac{f_{yy}(0, 0)}{2} = -4$$

□

【問題】 以下の問いに答えよ。

- (1) 次の積分の値を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{(y+3)^2} dx dy \quad D: |2x - y| \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 7$$

- (2) 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとで解け。

$$y'' - 5y' + 6y = 10 \sin x \quad \text{初期条件} : y(0) = 0, y'(0) = 0$$

(2023 電気通信大情報理工学域)

【解答】 (1) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 7, 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1\}$ より

$$\iint_D \frac{1}{(y+3)^2} dx dy = \int_0^7 \left(\int_{2x-1}^{2x+1} \frac{dy}{(y+3)^2} \right) dx = \int_0^7 \left[-\frac{1}{y+3} \right]_{2x-1}^{2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^7 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} [\log(x+1) - \log(x+2)]_0^7 = 2 \log 2 - \log 3$$

(2) 齊次微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ の特性多項式 $\omega^2 - 5\omega + 6 = (\omega - 2)(\omega - 3)$ の特性根は $\omega = 2, 3$ だから一般解は $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ (c_1, c_2 は任意定数)。

また $y'' - 5y' + 6y = 10 \sin x$ は $y = A \cos x + B \sin x$ (A, B は定数) という形の特殊解を持つと予想される。これを代入すると

$$y'' - 5y' + 6y = (5A - 5B) \cos x + (5B + 5A) \sin x = 10 \sin x$$

より $A - B = 0, A + B = 2, A = B = 1$ 。従って $y = \cos x + \sin x$ という特殊解が得られる。

齊次方程式に対する一般解と上の特殊解を合わせれば与式的一般解は $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \cos x + \sin x$ (c_1, c_2 は任意定数) となる。更に初期条件より

$$y(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0, \quad y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} - \sin x + \cos x \quad y'(0) = 2c_1 + 3c_2 + 1 = 0$$

c_1, c_2 に関する連立方程式を解けば初期値問題の解は $y = -2e^{2x} + e^{3x} + \cos x + \sin x$ 。

□

【問題】 xy 平面上の曲線 $C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = t \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ と表す. C 上で y は x の関数となるが, これを $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) と表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ ($0 < x < 1$) を t の関数として表せ.
 (2) $f(x)$ の $x = \frac{1}{2}$ に Taylor 展開

$$f(x) = a_0 + a_1 \left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots$$

の係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ.

- (3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき, 重積分 $\iint_D x \, dx \, dy$ の値を求めよ.

(2022 電気通信大情報理工学域)

【解答】 (1) t で t に関する微分を表す. $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\cos t - t \sin t}{\cos t}$

- (2) $\sin t = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{\pi}{6}$ となる.

$$a_0 = y|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi, \quad a_1 = \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6\sqrt{3} - \pi}{6\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{\cos t} \frac{(-2 \sin t - t \cos t) \cos t + (\cos t - t \sin t) \sin t}{\cos^2 t} = -\frac{\sin t \cos t + t \cos^2 t + t \sin^2 t}{\cos^3 t} \end{aligned}$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \frac{3}{4} + \frac{\pi}{6} \frac{1}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = -\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{9\sqrt{3}}$$

- (3) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$ と $x = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{f(x)} x \, dy \right) dx = \int_0^1 x f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f'(x) dx \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t - t \sin t}{\cos t} \cos t \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t - t \sin^3 t) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t \cos t + t \cos^2 t \sin t - t \sin t) dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \, dt = \left[\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^2 t \sin t \, dt = \left[-t \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt = [-t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1$$

より $\iint_D x \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} - 1 \right) = \frac{2}{9}$ □

【問題】 以下の重積分の値を求めよ.

$$(1) I_1 = \iint_{D_1} e^y dx dy \quad D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x - y \leq 1\}$$

$$(2) I_2 = \iint_{D_2} x\sqrt{x} dx dy \quad D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq x\}$$

$$(3) I_3 = \iiint_V y\sqrt{1+x^2+y^2+z^2} dx dy dz \quad V = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

(2022 電気通信大情報理工学域)

【解答】 (1) $u = x + y, v = x - y$ ($x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$) と置く.

$$D_1 = \{(u, v) : 0 \leq u, v \leq 1\}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

と変数変換公式より

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{\frac{u-v}{2}} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^{\frac{u}{2}} du \right) \left(\int_0^1 e^{-\frac{v}{2}} dv \right) = 2 \frac{(\sqrt{e} - 1)^2}{\sqrt{e}}$$

(2) $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と置く. $D_2 = \{(r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos \theta\}$ と変数変換公式より

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} r^{\frac{3}{2}} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} |r| dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{\cos \theta} r^{\frac{5}{2}} dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{7} (\cos \theta)^{\frac{7}{2}} \right) d\theta = \frac{4}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{32}{105} \quad (\text{Wallis の公式より}) \end{aligned}$$

(3) $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$ と置く.

$$V = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

と変数変換公式より

$$I_3 = \iiint_V r \sin \theta \sin \phi \sqrt{1+r^2} |r^2 \sin \theta| dr d\theta d\phi = \left(\int_0^1 r^3 \sqrt{1+r^2} dr \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \right)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^3 \sqrt{1+r^2} dr &= \left[r^2 \cdot \frac{1}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 r (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} (1+r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{15} (4\sqrt{2} - 1) = \frac{2\sqrt{2} + 2}{15} \\ \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore I_3 = \frac{2\sqrt{2} + 2}{15} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2} + 1}{15} \pi$$

□