【問題】

(1) 中間値の定理を述べよ (証明不要).

(2) 実数値関数 $f(x)$ は閉区間 $[-1,1]$ で連続, $f(-1)=1/2$, $f(1)=-1/2$, $0<f(0)<1$ だとする.

(a) 方程式 $x+1=f(x)$ の解 α が開区間 $(-1,0)$ に存在する事を示せ.

(b) 方程式 $x-1=f(x)$ の解 β が開区間 $(0,1)$ に存在する事を示せ.

(c) $f(x)$ が $(-1,1)$ で微分可能, $-1<f'(x)<1$ を満たすならば α,β は共に唯一つの解であり $\beta>\alpha+1$ が成り立つ事を示せ.

(H21 首都大理学研究科数理情報科学専攻)

【解答】 (1) 閉区間 $[a,b]$ に於いて定義された実数値関数 $f(x)$ は連続ならば次が成立：

- $f(a)<f(b)$ ならば $f(a)<\gamma<f(b)$ なる任意の γ に対し $a<c<b$ かつ $f(c)=\gamma$ となる c が存在する.
- $f(b)<f(a)$ ならば $f(b)<\gamma<f(a)$ なる任意の γ に対し $a<c<b$ かつ $f(c)=\gamma$ となる c が存在する.

(2) (a) $g(x)=x+1-f(x)$ と置く. $g(-1)=-1/2<0$, $g(0)=1-f(0)>0$ だから, 中間値の定理より $g(\alpha)=0$, $-1<\alpha<0$ となる α が存在する. これが求めるものである.
(b) $h(x)=x-1-f(x)$ と置く. $h(0)=-1+f(0)>0$, $h(1)=-1/2<0$ だから, 中間値の定理より $h(\beta)=0$, $0<\beta<1$ となる β が存在する. これが求めるものである.
(c) 上述の記号を踏襲する. $g'(x)=h'(x)=1-f'(x)>0$ より $g(x),h(x)$ は共に狭義単調増加. これより α,β の一意性が分かる. 今, $\beta\leq\alpha+1$ だとする. 平均値の定理より

$$f'(\gamma)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta-1-\alpha-1}{\beta-\alpha}=1-\frac{2}{\beta-\alpha},\qquad \alpha<\gamma<\beta$$

となる γ が存在するが, $\beta\leq\alpha+1$ より $1-\frac{2}{\beta-\alpha}\leq-1$ だから $-1<f'(x)<1$ という仮定に反する. よって $\beta<\alpha+1$ である. $\square$

【問題】 数列 $\{a_n\}$ を次の式で定義する：

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \frac{3a_{n-1}+4}{2a_{n-1}+3} \quad (n \geq 2).$$

(1) 数列 $\{a_n\}$ は上に有界である事を示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ は収束する事を示し，極限値を求めよ.

(H19 首都大理学研究科数理情報科学専攻)

【解答】 (1) n に関する帰納法により $0 < a_n < \sqrt{2}$ である事を示す. $n=1$ のときは自明. $1 < n$ だとし，$n-1$ までの成立を仮定する. 漸化式より $a_n > 0$ は明らか. また

$$\sqrt{2} - a_n = \frac{2\sqrt{2}a_{n-1} + 3\sqrt{2} - 3a_{n-1} - 4}{2a_{n-1}+3} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2a_{n-1}+3}(\sqrt{2} - a_{n-1}) > 0$$

だから $a_n < \sqrt{2}$ となる. これより任意の n に対して $0 < a_n < \sqrt{2}$ が成立. 特に上に有界である.

(2) $n \geq 2$ のとき $\lambda = \frac{3-2\sqrt{2}}{3}$ と置けば

$$0 < \frac{3-2\sqrt{2}}{2a_{n-1}+3} < \lambda = \frac{3-2\sqrt{2}}{3} < 1$$

となる. これと (1) の計算より

$$0 < \sqrt{2} - a_n \leq \lambda(\sqrt{2} - a_{n-1}) \leq \cdots \leq \lambda^{n-1}(\sqrt{2} - a_1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

従って $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ である. $\square$