【問題】 以下の各問に答えよ.

(1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) s と t を正の実数として, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = (n+s)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定義する. 余弦関数 $\cos x$ のテイラー展開を用いて, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つような s と t の組 (s, t) をすべて求めよ.

(3) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty}\left\{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n dt.$$

(H24 年度 大阪大理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) 二項定理より

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n - 1\right| \;&\leq\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|a_n|^k}{n^k} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k}|a_n|^k \\ &=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)|a_n|^k \;\leq\; |a_n|\times\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_n|^{k-1}}{k!}\end{aligned}$$

関数 e^t の $t=0$ での微分係数を考えれば任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$0 < |t| < \delta \quad \text{ならば} \quad \left|\frac{e^t - 1}{t} - 1\right| < \varepsilon$$

となる $\delta > 0$ がとれる. 特に $\varepsilon = 1/2$ のときの δ を 1 つ固定する. 更に $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ という仮定より $|a_n| < \delta \ (n \geq N)$ となる N がとれる. この $n \geq N$ となる n に対して

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_n|^{k-1}}{k!} \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_n|^{k-1}}{k!} \;=\; \frac{e^{|a_n|}-1}{|a_n|} \;<\; \frac{3}{2}$$

となり, 従って $\left|\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n - 1\right| < \frac{3}{2}|a_n|$ が成り立つ. ここで再び仮定を用いれば $\left|\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n - 1\right| \to 0 \ (n\to\infty)$, 即ち $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n = 1$ となる.

(2) 余弦関数の Taylor 展開より

$$n\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - n \;=\; -\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{n}\left(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!n} + \frac{t^8}{8!n^2} - \cdots\right) \qquad \cdots\cdots (*)$$

$$\frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!n} + \frac{t^8}{8!n^2} + \cdots \;\leq\; \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + \cdots \;=\; \cosh t - 1 - \frac{t^2}{2!}$$

より $(*)$ の右辺第 2 項の級数は絶対収束する. 故に $\lim_{n\to\infty}\{n\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - n\} = -\frac{t^2}{2}$. これと $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1$ とを併せて $\lim_{n\to\infty} a_n = s - \frac{t^2}{2}$.

従って $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる (s, t) は st 平面内の $s = t^2/2$ を満たす点の全体 である.

(3) $a_n = \left(n + \frac{t^2}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - n$ と置く. (2) の結果より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となっている. また

$$n + a_n \;=\; \left(n+\frac{t^2}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \qquad \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \;=\; \left(1+\frac{t^2}{2n}\right)^n\left\{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n$$

及び (1) より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{t^2}{2n}\right)^n} \;=\; \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t^2}{2n}\right)^n} \;=\; \frac{1}{e^{\frac{t^2}{2}}} \;=\; e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\therefore\quad \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left\{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n dt \;=\; \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \;=\; \underline{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

□

【問題】 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 及び実ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ を与えるとき，次の重積分の収束・発散を判定せよ：

$$I = \iint_{\{x+y\geq 0\}} e^{\langle A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\rangle} dxdy.$$

ここで $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. また $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積を表す.

(H18 大阪大学理学研究科 数学)

【解答】 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $(P^{-1} = {}^tP)$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = {}^tP\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} b' \\ c' \end{bmatrix} = {}^tP\boldsymbol{b}$ とすれば ${}^tPAP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,

$$\langle A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\rangle = \langle P^tPAP^tP\boldsymbol{x} + P^tP\boldsymbol{b}, P^tP\boldsymbol{x}\rangle = \langle {}^tPAP\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}', \boldsymbol{y}\rangle = b'X - 2(Y-(c'/2))^2 + (c')^2/8,$$

$\{x+y\geq 0\} = \{X \geq 0\}$, 及び $dxdy = dXdY$ となる. 変数変換公式より

$$\begin{aligned} I = &\iint_{\{X\geq 0\}} e^{b'X-2(Y-(c'/2))^2+(c')^2/8} dXdY = \left(\int_0^\infty e^{b'X} dX\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-2(Y-(c'/2))^2+(c')^2/8} dY\right) \\ =&e^{(c')^2/8}\left(\int_0^\infty e^{b'X} dX\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-2Y^2} dY\right). \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ より $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-2Y^2}dY = \sqrt{(\pi/2)}$. 一方, $b' \neq 0$ のとき

$$\int_0^\infty e^{b'X}dX = \lim_{X\to\infty} \infty_0^X e^{b'X}dX = \frac{1}{b'}\lim_{X\to\infty}(e^{b'X}-1)$$

だから, $b' < 0$, $b' > 0$ に応じて $\displaystyle\int_0^\infty e^{b'X}dX$ は収束, 発散する. $b' = 0$ の場合も含めて I は $b < -c$ ならば収束, $b \geq -c$ ならば発散する. □

【問題】 次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $u=\log x-\log(1-x-y)$, $v=\log y-\log(1-x-y)$ を用いて積分

$$I(\alpha,\beta)=\iint_{\mathbb{R}^2}(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\alpha-2}(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\beta-2}(e^{-u-v}+e^{-v}+e^{-u})dudv$$

が収束するような α,β の範囲を求めよ.

(2) $I(1,1)$ の値を求めよ.

(H15 大阪大学基礎工学研究科)

【解答】 (1) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x,y>0,\ x+y<1\}$, $\Psi(x,y)=(\log x-\log(1-x-y),\log y-\log(1-x-y))$ とし, $\Phi(u,v)=\left(\dfrac{e^u}{1+e^u+e^v},\dfrac{e^v}{1+e^u+e^v}\right)$ とする. Ψ は D 上で定義される. 一方, $(x,y)=\Phi(u,v)$ ならば $x,y>0$, かつ $1-x-y=\dfrac{1}{1+e^u+e^v}>0$, だから $\Phi(\mathbb{R}^2)\subset D$ となる.

$$e^u=e^{\log x-\log(1-x-y)}=\frac{x}{1-x-y}\qquad e^v=e^{\log y-\log(1-x-y)}=\frac{y}{1-x-y}\qquad 1+e^u+e^u=\frac{1}{1-x-y}$$

より $\Phi\cdot\Psi(x,y)=(x,y)$ が成立. $1-x-y=\dfrac{1}{1+e^u+e^v}$ より

$$\Psi\cdot\Phi(u,v)=\left(\log\frac{e^u}{1+e^u+e^v}-\log\frac{1}{1+e^u+e^v},\ \log\frac{e^v}{1+e^u+e^v}-\log\frac{1}{1+e^u+e^v}\right)=(u,v).$$

従って $\Phi:\mathbb{R}^2\to D$, $\Psi:D\to\mathbb{R}^2$ は同相写像となる. また $(u,v)=\Psi(x,y)$ の Jacobi 行列, Jacobi 行列式は

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x-y} & \frac{1}{1-x-y}\\ \frac{1}{1-x-y} & \frac{1}{y}+\frac{1}{1-x-y}\end{bmatrix},\qquad \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\frac{1}{xy(1-x-y)}.$$

だから C^1 級微分同型となる. 次に $u-v=\log x-\log y$, $v-u=\log y-\log x$, $-u-v=\log(1-x-y)-\log x-\log y$ より

$$e^{u-v}=e^{\log x-\log y}=\frac{x}{y},\qquad e^{v-u}=e^{\log y-\log x}=\frac{y}{x},\qquad e^{-u-v}=e^{\log(1-x-y)-\log x-\log y}=\frac{1-x-y}{xy}$$

$$1+e^{-u}+e^{v-u}=1+\frac{1-x-y}{x}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x},\qquad 1+e^{-v}+e^{u-v}=1+\frac{1-x-y}{y}+\frac{x}{y}=\frac{1}{y},$$

$$e^{-u-v}+e^{-v}+e^{-u}=\frac{1-x-y}{xy}+\frac{1-x-y}{y}+\frac{1-x-y}{x}=\frac{1-(x+y)^2}{xy}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &(1+e^{-u}+e^{v-u})^{-\alpha-2}(1+e^{-v}+e^{u-v})^{-\beta-2}(e^{-u-v}+e^{-v}+e^{-u})dudv\\ =\ &x^{\alpha+2}y^{\beta+2}\frac{1-(x+y)^2}{xy}\frac{1}{xy(1-x-y)}dxdy\ =\ x^\alpha y^\beta(1+x+y)dxdy\end{aligned}$$

となる. 従って変数変換公式より

$$I(\alpha,\beta)=\iint_D x^\alpha y^\beta(1+x+y)dxdy$$

となる. ここで $0<\varepsilon\ll1$ に対し $E_\varepsilon=[\varepsilon,1]\times[\varepsilon,1]$, $E'_\varepsilon=[\varepsilon,1/2]\times[\varepsilon,1/2]$, $D_\varepsilon=E_\varepsilon\cap D$ と置くと

$$\iint_{D_\varepsilon}x^\alpha y^\beta(1+x+y)dxdy\le\iint_{E_\varepsilon}x^\alpha y^\beta\cdot3dxdy=3\left(\int_\varepsilon^1x^\alpha dx\right)\left(\int_\varepsilon^1y^\beta dy\right)\tag{i}$$

$$\iint_{D_\varepsilon}x^\alpha y^\beta(1+x+y)dxdy\ge\iint_{E'_\varepsilon}x^\alpha y^\beta dxdy\ge\iint_{E'_\varepsilon}x^\alpha y^\beta dxdy=\left(\int_\varepsilon^{1/2}x^\alpha dx\right)\left(\int_\varepsilon^{1/2}y^\beta dy\right)\tag{ii}$$

が成立. $\alpha>-1$, $\beta>-1$ のとき

$$\left(\int_\varepsilon^1x^\alpha dx\right)\left(\int_\varepsilon^1y^\beta dy\right)=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}(1-\varepsilon^{\alpha+1})(1-\varepsilon^{\beta+1})\ \to\ \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\quad(\varepsilon\to0+0)$$

だから (i) より $I(\alpha,\beta)$ は収束する. 一方, $\alpha\le-1$ のとき,

$$\int_\varepsilon^{1/2}x^\alpha dx=\begin{cases}-\log\varepsilon-\log2 & (\alpha=-1)\\ \frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{1}{2^{\alpha+1}}-\frac{1}{\varepsilon^{-(\alpha+1)}}\right) & (\alpha<-1)\end{cases}$$

より，このとき $\varepsilon \to 0+0$ とすると $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1/2} x^{\alpha} dx \to +\infty$ となる．同様に $\beta \leq -1$ のときも $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1/2} x^{\beta} dx \to +\infty$ となる．従って $\alpha \leq -1$ または $\beta \leq -1$ ならば (ii) より $I(\alpha, \beta)$ は発散する．

以上より $I(\alpha, \beta)$ が収束する範囲は $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha > -1,\ \beta > -1\ \}$ である．

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$ より

$$
\begin{aligned}
I(1,1) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy(1+x+y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}(x+x^2)y^2 + \frac{1}{3}xy^3 \right]_0^{1-x} \right) dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (5x - 9x^2 + 3x^3 + x^4) dx = \frac{3}{40}
\end{aligned}
$$

□