

【問題】 $a > 0, \rho \geq 0$ とする. このとき積分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}}$$

の値を求めよ.

(H25 岡山大学自然科学研究科 数理物理学専攻 改題)

【解答】 求める積分を $u(\rho)$ とする. $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ とする. 極座標 $x = r \sin \phi \cos \theta, y =$

$r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \phi$ に関する Jacobi 行列 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix}$ は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & r \cos \phi \sin \theta & r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \phi.$$

また V は

$$V' = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

と表されるから

$$u(\rho) = \iiint_{V'_\varepsilon} \frac{|r^2 \sin \phi| dr d\phi d\theta}{\sqrt{r^2 - 2\rho r + \rho^2}}$$

となる.

(1) $a < \rho$ のとき,

$$\begin{aligned} u(\rho) &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left\{ \int_0^a r \left(\int_0^\pi \frac{r \sin \phi}{\sqrt{r^2 - 2\rho r \cos \phi + \rho^2}} d\phi \right) dr \right\} \\ &= 2\pi \int_0^a r \left[\frac{1}{\rho} \sqrt{r^2 - 2\rho r \cos \phi + \rho^2} \right]_0^\pi dr = \frac{2\pi}{\rho} \int_0^a r(|r + \rho| - |r - \rho|) dr = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^a r^2 dr = \frac{4\pi a^3}{3\rho}. \end{aligned}$$

(2) $0 \leq \rho \leq a$ のとき, 被積分関数は不連続だから, この積分は広義積分である. $0 < \varepsilon$ に対し

$$V_{\varepsilon-} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq (\rho - \varepsilon)^2\}, \quad V_{\varepsilon+} = \{(x, y, z) \mid (\rho + \varepsilon)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

とする ($\rho = 0$ のときは $V_{\varepsilon-} = \emptyset, \rho = a$ のときは $V_{\varepsilon+} = \emptyset$ とする). $V_{\varepsilon\pm}$ は極座標によってそれぞれ

$$V'_{\varepsilon-} = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq r \leq \rho - \varepsilon, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad V'_{\varepsilon+} = \{(r, \theta, \phi) \mid \rho + \varepsilon \leq r \leq a, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

と表されるから, $u_{\varepsilon\pm} = \iiint_{V'_{\varepsilon\pm}} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}}$ とするとき, (1) の計算と同様にすれば

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon-} &= \iiint_{V'_{\varepsilon-}} \frac{|r^2 \sin \phi| dr d\phi d\theta}{\sqrt{r^2 - 2\rho r + \rho^2}} = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left\{ \int_0^{\rho-\varepsilon} r \left(\int_0^\pi \frac{r \sin \phi}{\sqrt{r^2 - 2\rho r \cos \phi + \rho^2}} d\phi \right) dr \right\} \\ &= \frac{2\pi}{\rho} \int_0^{\rho-\varepsilon} r(|r + \rho| - |r - \rho|) dr = \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\rho-\varepsilon} r^2 dr = \frac{4\pi}{3\rho} (\rho - \varepsilon)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon+} &= \iiint_{V'_{\varepsilon+}} \frac{|r^2 \sin \phi| dr d\phi d\theta}{\sqrt{r^2 - 2\rho r + \rho^2}} = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left\{ \int_{\rho+\varepsilon}^a r \left(\int_0^\pi \frac{r \sin \phi}{\sqrt{r^2 - 2\rho r \cos \phi + \rho^2}} d\phi \right) dr \right\} \\ &= \frac{2\pi}{\rho} \int_{\rho+\varepsilon}^a r(|r + \rho| - |r - \rho|) dr = \frac{4\pi}{\rho} \int_{\rho+\varepsilon}^a r \rho dr = 2\pi \{a^2 - (\rho + \varepsilon)^2\} \end{aligned}$$

$$\therefore u(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (u_{\varepsilon-} + u_{\varepsilon+}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{4\pi}{3\rho} (\rho - \varepsilon)^3 + 2\pi \{a^2 - (\rho + \varepsilon)^2\} \right) = 2\pi \left(a^2 - \frac{\rho^2}{3} \right).$$

$M = 4\pi a^3/3$ と置けば $u(\rho)$ は次の通り :

$$u(\rho) = \frac{M}{\rho} (a < \rho), \quad \frac{3M}{2a} \left(1 - \frac{\rho^2}{3a^2} \right) (0 \leq \rho \leq a).$$

□

《考察》 原題は次の問題：

【問題】 次の問いに答えよ。

(1) $a > 0$ のとき、広義積分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

の値を求めよ。

(2) $\rho > a > 0$ のとき、積分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}}$$

の値を求めよ。

(H25 岡山大学自然科学研究科 数理物理学専攻)

以下、[杉浦 2] 第 VIII 章 §7 より引用する。

定義 $y \in \mathbb{R}^3$ を固定するとき、 $\mathbb{R}^3 - \{y\}$ で定義された関数

$$u_y(x) = \frac{1}{r_y(x)} \quad (r_y(x) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2})$$

を y に於ける **単位点 potential** という。更に \mathbb{R}^3 の (体積確定な) 集合 D と D 上の実数値関数 m に対し

$$u_D(x) = \iiint_D \frac{m(y)}{r_y(x)} dy$$

を **体分布 potential** という。 □

上記の問題は帯電した球体を作る静電場や重力場等の物理的な力の場の potential、特に D が半径 a の球体 $\mathbb{D}_a^3 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq a\}$ の場合の体分布 potential

$$u(x) = \iiint_{\mathbb{D}_a^3} \frac{1}{r_y(x)} dy$$

を求める問題の一部になっている。一般の $x \in \mathbb{R}^3$ に対し $|x| = \rho$ ($0 < \rho$) だとすると、 $x = T^t[0, 0, \rho]$ となる直交変換 T が存在。 $v = Ty$ とすると $y \in \mathbb{D}_a^3$ 、 $dv = |T|dy = dy$ かつ

$$r_y(x) = |x - v| = |T^t[0, 0, \rho] - Ty| = |{}^t[0, 0, \rho] - y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - \rho)^2} = r_y({}^t[0, 0, \rho])$$

となるから

$$u(x) = \iiint_{\mathbb{D}_a^3} \frac{1}{r_y(x)} dy = \iiint_{\mathbb{D}_a^3} \frac{dy_1 dy_2 dy_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - \rho)^2}} = u(\rho)$$

となる。この問題を電荷が球体 \mathbb{D}_a^3 に一様に分布している帯電体³作る静電場の potential を求める問題と考えるとき、解答に於ける M は球体 \mathbb{D}_a^3 上の全電荷を表している。

【問題】 (1) 定積分

$$I_1 = \int_0^{2\pi} x \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$$

を計算せよ.

(2) φ の関数行列 (ヤコビ行列)

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2\pi, \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{x}{4} \right\}$$

とする. このとき

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x \left| \sin\left(\frac{x-y}{4}\right) \right| = 4 \iint_D x |\sin y| dx dy$$

を示し, この重積分を計算せよ.

(H25 岡山大学自然科学研究科 数学)

【解答】 (1) $e^{i\frac{x}{4}} = \cos\left(\frac{x}{4}\right) + i \sin\left(\frac{x}{4}\right)$ に注意し部分積分を使えば

$$\begin{aligned} I_1 + iI_2 &= \int_0^{2\pi} \pi x e^{i\frac{x}{4}} dx = \left[\frac{4}{i} x e^{i\frac{x}{4}} \right]_0^{2\pi} - \frac{4}{i} \int_0^{2\pi} e^{i\frac{x}{4}} dx \\ &= \frac{4}{i} 2\pi e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{i} \left[\frac{4}{i} e^{i\frac{x}{4}} \right]_0^{2\pi} = 8\pi - 16 + 16i \end{aligned}$$

従って $I_1 = 16$, $I_2 = 8\pi - 16$.

(2) $z = (x-y)/4$ ($y = x-4z$) とし, $(x, y) \mapsto (x, z)$ という変数変換を施す. Jacobian は $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4$ であり,

$$0 \leq y \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x-4z \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{4} - \frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{x}{4}$$

より $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ は D に移るから, 変数変換公式より

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x \left| \sin\left(\frac{x-y}{4}\right) \right| = \iint_D x |\sin z| |-4| dx dz = 4 \iint_D x |\sin z| dx dz$$

となる. $0 \leq z \leq \pi/2$ のとき $|\sin z| = \sin z$, $-\pi/2 \leq z \leq 0$ のとき $|\sin z| = -\sin z$ となる事に注意すれば, 右辺の積分は

$$\begin{aligned} 4 \iint_D x |\sin z| dx dz &= 4 \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{4}} x (-\sin z) dz \right) dx + 4 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{x}{4}} x \sin z dz \right) dx \\ &= 4 \int_0^{2\pi} x \left(1 - \cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \right) dx - 4 \int_0^{2\pi} x \left(\cos\left(\frac{x}{4}\right) - 1 \right) dx \\ &= 8 \int_0^{2\pi} x dx - 4 \int_0^{2\pi} x \sin\left(\frac{x}{4}\right) dx - 4 \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 16\pi^2 - 4I_1 - 4I_2 \end{aligned}$$

となる. これと (1) の結果を合わせれば

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x \left| \sin\left(\frac{x-y}{4}\right) \right| = 16\pi^2 - 16 - (8\pi - 16) = 8\pi(2\pi - 1).$$

□