【問題】 以下の問に答えよ．

(1) f を $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数値関数とし，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

により定義する．このとき次を満たす定数 C が存在する事を示せ．

$$|a_n| \leq \frac{C}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

(2) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を $f_n(0) = 0$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の C^1 級実数関数列とする． $f_n'(x)$ が $g(x)$ に $\mathbb{R}$ 上広義一様収束するとき，$f_n(x)$ は $\displaystyle\int_0^x g(y)dy$ に $\mathbb{R}$ 上広義一様収束する事を示せ．

(3) $C > 0$ は定数，実数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ は

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^3} \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

を満たすとする．このとき $\mathbb{R}$ 上の関数列

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数に一様収束する事を示せ．

(H30 名古屋大学多元数理研究科)

【解答】 (1) f が C^1 級という仮定より $|f'(x)| \leq M \ \ (x \in [0, 2\pi])$ となる $M > 0$ が存在し，

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left| -\frac{f(2\pi) - f(0)}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx \right| \\ &\leq \frac{|f(2\pi) - f(0)|}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(x)| dx \leq \frac{|f(2\pi) - f(0)| + 2\pi M}{n}\end{aligned}$$

$C = |f(2\pi) - f(0)| + 2\pi M$ と置けば $|a_n| \leq C/n \ \ (n = 1, 2, \ldots)$ となる．

(2) 任意の正数 $R > 0$ を固定する．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，仮定より $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/R \ \ (x \in [-R, R],\ n \geq N)$ となる正整数 N がとれる．$n \geq N$ となる整数 n に対し，$0 \leq x \leq R$ のとき，

$$\begin{aligned}\left| f_n(x) - \int_0^x g(y)dy \right| &= \left| \int_0^x f_n'(y)dy - \int_0^x g(y)dy \right| \\ &\leq \int_0^x |f_n'(y) - g(y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{R}\int_0^R dy = \varepsilon.\end{aligned}$$

$-R \leq x \leq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}\left| f_n(x) - \int_0^x g(y)dy \right| &= \left| -\int_x^0 f_n'(y)dy + \int_x^0 g(y)dy \right| \\ &\leq \int_x^0 |g(y) - f_n'(y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{R}\int_{-R}^0 dy = \varepsilon.\end{aligned}$$

従って f_n は $\displaystyle\int_0^x g(y)dy$ に広義一様収束する．

(3) $m, n \in \mathbb{Z}_{>0} \ \ (m \leq n)$，及び任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} k a_k \cos kx \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} k|a_k| \leq C\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq C\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right)$$

より関数列 $\{f_n'\}$ は一様 Cauchy 条件を満たすから，$\{f_n'\}$ は $\mathbb{R}$ 上の或る連続関数に一様収束する．この極限を $g(x)$ とする．(2) の証明を修正すれば f_n' が g に一様収束すれば f_n は $\mathbb{R}$ 上 $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(y)dy$ に一様収束する事が分かる．g は連続だから G は C^1 級，従って f_n は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数に一様収束する． □

【問題】 $\mathbb{R}^2$ の点 (x,y)，(x',y') に対して

$$(x,y)-(x',y')=(x-x',y-y'), \qquad \|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 実関数 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続で，ある点 (x_0,y_0) に対して $f(x_0,y_0)>0$ であり，また $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y)=0$ を満たすとする．このとき $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で最大値を持つ事を示せ．

(2) 実関数 $g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で，

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0, \qquad \lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0$$

を満たすとする．このとき或る定数 $L>0$ が存在して，任意の $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$|g(x,y)-g(x',y')|\le L\|(x,y)-(x',y')\|$$

が成り立つ事を示せ．

(H28 名古屋大学多元数理研究科)

【解答】 (1) 仮定より $|f(x,y)|<f(x_0,y_0)$ $(\|(x,y)\|>R>\|(x_0,y_0)\|)$ となる $R>0$ がとれる．f の連続性より有界閉集合 $\|(x,y)\|\le R$ に於いて $f(x,y)$ は最大値 $f(x_1,x_1)$ を持つ．$\|(x_0,y_0)\|\le R$ だから $f(x_0,y_0)\le f(x_1,x_1)$ となり，よって $f(x_1,y_1)$ は $\mathbb{R}^2$ 全体での最大値となる．

(2) 仮定と (1) より，$M>0$ を十分大きくとれば

$$|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)|,\ |\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)|\le M \qquad (\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

が成立する．$x'<x$ のとき，平均値の定理より $g(x,y)-g(x',y)=\frac{\partial g}{\partial x}(x'',y)(x-x')$ となる $x'<x''<x$ が存在．これより

$$|g(x,y)-g(x',y)|=\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x'',y)\right||x-x'|\le M|x-x'|$$

となる．同様の議論より $x\le x'$ の場合にもこの不等式は成立. 更に同様の議論より任意の y,y' についても $|g(x,y)-g(x,y')|\le M|y-y'|$ が成立する．$(x,y)\neq(x',y')$ のとき，

$$\frac{(|x-x'|+|y-y'|)^2}{(x-x')^2+(y-y')^2}=1+\frac{2|x-x'||y-y'|}{(x-x')^2+(y-y')^2}\le 1+1=2$$

となるから，$(x,y)=(x',y')$ の場合と併せて $|x-x'|+|y-y'|\le\sqrt{2}\|(x,x)-(x',y')\|$ が成立．以上を併せて

$$|g(x,y)-g(x',y')|\le|g(x,y)-g(x',y)|+|g(x',y)-g(x',y')|\le M|x-x'|+M|y-y'|\le\sqrt{2}M\|(x,x)-(x',y')\|.$$

$\sqrt{2}M<L$ となる L をとれば，題意の不等式を得る． $\square$

【問題】 $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 $\varphi(x,y)$ は

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)dxdy = 1, \qquad \varphi(x,y) \geq 0$$

を満たしているものとし，実数 $t > 0$ に対して $\varphi_t(x,y) = t^{-2}\varphi(t^{-1}x, t^{-1}y)$ と置く．また $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数 $f(x,y)$ は，或る有界集合 $K \subset \mathbb{R}^2$ の外で常に 0 とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．

(2) 実数 $\delta > 0$ に対し，$t \to 0+0$ のときの極限

$$\lim_{t\to 0+0} \iint_{x^2+y^2\geq\delta^2} \varphi_t(x,y)dxdy$$

の値を求めよ．

(3) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で有界な関数である事の理由を述べよ．

(4) 等式

$$\lim_{t\to 0+0} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)f(x,y)dxdy = f(0,0)$$

を証明せよ．

(H27 名古屋大学多元数理研究科)

【解答】 (1) $x = tu,\ y = tv$ と置く．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = t^2$ より, 変数変換公式から

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)dxdy = \frac{1}{t^2}\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u,v)t^2dudv = 1.$$

(2) $x = tu,\ y = tv$ と置く．$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = t^2$ 及び $\{x^2+y^2 \leq \delta^2\} = \{u^2+v^2 \leq (\delta/t)^2\}$ より，変数変換公式から

$$\iint_{x^2+y^2\leq\delta^2} \varphi_t(x,y)dxdy = \iint_{u^2+v^2\leq(\delta/t)^2} \varphi(u,v)dudv.$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to 0+0} \iint_{x^2+y^2\geq\delta^2} \varphi_t(x,y)dxdy = \lim_{t\to 0+0} \iint_{u^2+v^2\leq(\delta/t)^2} \varphi(u,v)dudv = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(u,v)dudv = 1.$$

(3) 有界閉集合上の連続関数は有界だから，K 上で $|f| \leq M$ となる $M > 0$ が存在．補集合 K^c 上で $f = 0$ となるから $\mathbb{R}^2$ 全体で $|f| \leq M$ となる．

(4) ε を任意の正数とする．連続性より $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon/2 \ \ (x^2+y^2 < \delta^2)$ となる正数 δ がとれる．また f は有界だから $|f(x,y) - f(0,0)| \leq M$ となる正数 M が存在する．$t > 0$ に対し

$$\int_{x^2+y^2\geq(\delta/t)^2} \varphi(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)dxdy - \int_{x^2+y^2\leq(\delta/t)^2} \varphi(x,y)dxdy \ \longrightarrow\ 0 \qquad (t \to 0+0)$$

より $\displaystyle\int_{x^2+y^2\geq(\delta/t)^2} \varphi(x,y)dxdy < \varepsilon/2M \ \ (0 < t < \delta')$ となる正数 δ' が存在する．(2) と同様の変数変換を行えば，$0 < t < \delta'$ となる任意の t に対し

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)f(x,y)dxdy - f(0,0)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)(f(x,y) - f(0,0))dxdy\right| \qquad (\because\ (1)\ \text{より}) \\
\leq& \left|\int_{x^2+y^2\leq\delta^2} \varphi_t(x,y)(f(x,y)-f(0,0))dxdy\right| + \left|\int_{x^2+y^2\geq\delta^2} \varphi_t(x,y)(f(x,y)-f(0,0))dxdy\right| \\
\leq& \frac{\varepsilon}{2}\int_{x^2+y^2\leq\delta^2} \varphi_t(x,y)dxdy + M\int_{x^2+y^2\geq\delta^2} \varphi_t(x,y)dxdy \\
=& \frac{\varepsilon}{2}\int_{x^2+y^2\leq(\delta/t)^2} \varphi(x,y)dxdy + M\int_{x^2+y^2\geq(\delta/t)^2} \varphi(x,y)dxdy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

従って $\displaystyle\lim_{t\to 0+0} \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi_t(x,y)f(x,y)dxdy = f(0,0)$ となる． □

【問題】 平面から原点を除いた集合を $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で表し，U 上の関数は全て実数値だとする．また U 上の関数 $h(x,y)$ が調和関数であるとは，C^2 級であり，かつ U 上で常に $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ を満たす事を言う．以下の問に答えよ．

(1) U 上の連続関数 $f(x,y)$ に対して等式

$$\int_{-r}^{r} \left\{ f(\sqrt{r^2-y^2}, y) - f(-\sqrt{r^2-y^2}, y) \right\} dy = r\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta d\theta,$$

$$\int_{-r}^{r} \left\{ f(x, \sqrt{r^2-x^2}) - f(x, -\sqrt{r^2-x^2}) \right\} dx = r\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

を示せ．ただし $r > 0$ とする．

(2) U 上の C^1 級関数 $g(x,y)$ に対して等式

$$\iint_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le r^2} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dxdy = r\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta d\theta - \varepsilon\int_0^{2\pi} g(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\cos\theta d\theta,$$

$$\iint_{\varepsilon^2 \le x^2+y^2 \le r^2} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dxdy = r\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta d\theta - \varepsilon\int_0^{2\pi} g(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)\sin\theta d\theta$$

を示せ．ただし $0 < \varepsilon < r$ とする．

(3) U 上の調和関数 $h(x,y)$ に対して $H(\rho,\theta) = h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ と置くとき，$F(\rho) = \rho\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho,\theta)d\theta$ は ρ によらず一定である事を示せ．

(4) U 上の調和関数で，その値が原点からの距離のみで定まるものを全て求めよ．

(H22 名古屋大学多元数理研究科)

【解答】 (1) $y = r\sin\theta$ と置けば

$$\begin{aligned}
r\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta d\theta \\
&\quad + \int_{\pi}^{3\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta d\theta \\
&= \int_0^{r} f(\sqrt{r^2-y^2}, y)dy + \int_r^0 f(-\sqrt{r^2-y^2}, y)dy \\
&\quad + \int_0^{-r} f(-\sqrt{r^2-y^2}, y)dy + \int_{-r}^0 f(\sqrt{r^2-y^2}, y)dy \\
&= \int_{-r}^{r} \{f(\sqrt{r^2-y^2}, y) - f(-\sqrt{r^2-y^2}, y)\}dy.
\end{aligned}$$

$x = r\cos\theta$ と置けば

$$\begin{aligned}
r\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta d\theta &= -\int_0^{\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta \\
&\quad - \int_{\pi}^{3\pi/2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta - \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_r^0 f(x, \sqrt{r^2-x^2})dx - \int_0^{-r} f(x, \sqrt{r^2-x^2})dx \\
&\quad - \int_{-r}^0 f(x, -\sqrt{r^2-x^2})dx - \int_0^{r} f(x, -\sqrt{r^2-x^2})dx \\
&= \int_{-r}^{r} \{f(x, \sqrt{r^2-x^2}) - f(x, -\sqrt{r^2-x^2})\}dx.
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le r^2}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dxdy\\
=&\int_{-r}^{-\varepsilon}\{g(\sqrt{r^2-y^2},y)-g(-\sqrt{r^2-y^2},y)\}dy\\
&+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\{g(-\sqrt{\varepsilon^2-y^2},y)-g(-\sqrt{r^2-y^2},y)+g(\sqrt{r^2-y^2},y)-g(\sqrt{\varepsilon^2-y^2},y)\}dy\\
&+\int_{\varepsilon}^{r}\{g(\sqrt{r^2-y^2},y)-g(-\sqrt{r^2-y^2},y)\}dy\\
=&\int_{-r}^{r}\{g(\sqrt{r^2-y^2},y)-g(-\sqrt{r^2-y^2},y)\}dy-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\{g(\sqrt{\varepsilon^2-y^2},y)-g(-\sqrt{\varepsilon^2-y^2},y)\}dy\\
=&r\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta d\theta-\varepsilon\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\sin\theta d\theta.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le r^2}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dxdy\\
=&\int_{-r}^{-\varepsilon}\{g(x,\sqrt{r^2-x^2})-g(x,-\sqrt{r^2-x^2})\}dx\\
&+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\{g(x,-\sqrt{\varepsilon^2-x^2})-g(x,-\sqrt{r^2-x^2})+g(x,\sqrt{r^2-x^2})-g(x,\sqrt{\varepsilon^2-x^2})\}dx\\
&+\int_{\varepsilon}^{r}\{g(x,\sqrt{r^2-x^2})-g(x,-\sqrt{r^2-x^2})\}dx\\
=&\int_{-r}^{r}\{g(x,\sqrt{r^2-x^2})-g(x,-\sqrt{r^2-x^2})\}dx-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\{g(x,\sqrt{\varepsilon^2-x^2})-g(x,-\sqrt{\varepsilon^2-x^2})\}dx\\
=&r\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta d\theta-\varepsilon\int_0^{2\pi}f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)\sin\theta d\theta.
\end{aligned}
$$

(3) 2 次元 Laplacian Δ は極座標により

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

と表される． h は調和関数だから $\rho\dfrac{\partial^2 H}{\partial\rho^2}+\dfrac{\partial H}{\partial\rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}$． 従って

$$\frac{\partial F}{\partial\rho}=\int_0^{2\pi}\left(\rho\frac{\partial^2 H}{\partial\rho^2}+\frac{\partial H}{\partial\rho}\right)d\theta=-\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}d\theta=-\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial H}{\partial\theta}(\rho,2\pi)-\frac{\partial H}{\partial\theta}(\rho,0)\right\}=0.$$

従って F は ρ に依存しない．

(4) C^2 級関数 $h(x,y)$ に対し $H(\rho,\theta)=h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ と置く． h が距離のみに依存，即ち原点を中心とする回転に関し不変ならば $\frac{\partial^2 H}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial\rho}=0$ となる． この ρ に関する微分方程式を解けば

$$\frac{\partial H}{\partial\rho}=\frac{C_1}{\rho},\qquad H=C_1\log|\rho|+C_2\qquad(C_1,C_2\ \text{は定数}).$$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ より，距離のみに依存する調和関数は $h(x,y)=C_1\log\sqrt{x^2+y^2}+C_2$ $(C_1,C_2$ は定数$)$ となる． □