【問題】 偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ について次の問に答えよ.

(1) 変数変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ \rho=\log r$ によって

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$$

となることを示せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ の $\mathbb{R}^2$ における C^2 級の解 u が $u=L(\rho)\Theta(\theta)$ なる形をしているとき, L と Θ が満たすべき 2 階の常微分方程式を求めよ.

(3) (2) の形の解は $u=r^k(A\cos k\theta+B\sin k\theta)$ $(k=0,1,2,\cdots)$ に限ることを示せ.

(S58 九州大学理学研究科 数学)

【解答】 (1) 連鎖律より

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial \theta}=\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}&=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)=-r\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y}\\&=-r\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{aligned}$$

更に $\rho=\log r$ について $\dfrac{\partial}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \rho},\ \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \rho}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}$ より $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ だから

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)=&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial y}\\&\quad-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\Theta\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2}+L\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} & -L\\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} & \Theta\end{vmatrix}$$

右辺の行列式より第 1 列, 第 2 列は 1 次独立だから,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2}-k^2L=0,\qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}+k^2\Theta=0$$

となる $k\in\mathbb{C}$ が存在する. これが L,Θ の満たすべき 2 階常微分方程式である.

(3) (2) の方程式を解けば

$$L(\rho)=C_1r^k+C_2r^{-k},\qquad \Theta(\theta)=D_1e^{ik\theta}+D_2e^{-ik\theta}\qquad (C_1,C_2,D_1,D_2\ \text{は定数})$$

となる. u が 1 価であるためには $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$ でなければならないから, $k=0,1,2,\cdots$ となる. また $C_2\neq 0$ だとすると原点に於いて u は発散するから, $C_2=0$ となる. よって $A=C_1(D_1+D_2),\ B=iC_1(D_1-D_2)$ と置けば

$$u=L(\rho)\Theta(\theta)=C_1r^k(D_1e^{ik\theta}+D_2e^{-ik\theta})=r^k(A\cos k\theta+B\sin k\theta)$$

となる. □