

【問題】 $f(x)$ を \mathbb{R}^1 上の可積分関数とする.

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{1+t^2} dt$$

とおくとき、次の不等式が成立することを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx \leq \pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

(S55 熊本大学理学研究科 数学)

【解答】

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x-t)|}{1+t^2} dt \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x-t)|}{1+t^2} dx \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx \right) \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

$x-t=y$ と置くと $dy=dx$, $-\infty \rightarrow x \rightarrow \infty \Leftrightarrow -\infty \rightarrow y \rightarrow \infty$ だから $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$. 従って

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \right) \frac{1}{1+t^2} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \right).$$

右辺の第一因子は $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \tan^{-1} \varepsilon = \pi$ だから $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx \leq \pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$. \square