

【問題】 次の問に答えよ.

(1) 次の級数は収束する事を示せ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(2) $0 < a < 1$ とする. 次の式を示せ.

$$\int_0^a \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n^2}.$$

(3) 次の式を示せ.

$$\lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \int_0^a \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(H18 神戸大学理学研究科 数学)

【解答】 (1) $2^k \leq \ell \leq 2^k + 2^k - 1$ ならば $\frac{1}{\ell^2} \leq \frac{1}{(2^k)^2}$ となるから

$$\frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k+(2^k-1))^2} \leq \frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k)^2} = 2^k \times \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k}.$$

これより

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k+(2^k-1))^2} \right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

だから $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する.

(2) 左辺の被積分関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{1}{1-a^2} < +\infty$$

だから, 左辺は項別積分可能.

$$\therefore \int_0^a \int_0^a (xy)^n dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^a x^n dx \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{n^2}.$$

(3) (2) の右辺の変数 a に関する級数を $f(a)$ と置く. (1) より $f(1)$ は収束するから, Abel の連続性定理より $f(a)$ は $0 \leq a \leq 1$ で一様収束し, (2) の等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \rightarrow 1-0} f(a) = \lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n dx dy = \lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \int_0^a \frac{1}{1-xy} dx dy.$$

□