【問題】 平面上の C^1 級の函数 $f(x,y)$ がある非負の整数 n について

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \qquad (t>0)$$

をみたすとき，$f(x,y)$ を n 次の斉次函数という．

(1) $f(x,y)$ が n 次の斉次函数ならば

$$xf_x+yf_y=nf$$

が満たされる事を示せ.

(2) 逆に平面上の C^1 級の函数 $f(x,y)$ が

$$xf_x+yf_y=nf$$

を満たすならば $f(x,y)$ は n 次の斉次函数である事を示せ.

(S55 金沢大学理学研究科 数学)

【解答】 (1) 等式 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ を $t>0$ について微分すれば，連鎖律より

$$\frac{d}{dt}\big[f(tx,ty)\big]=\frac{d(tx)}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,xy)+\frac{d(ty)}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,xy)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,xy)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,xy)=nt^{n-1}f(x,y).$$

ここで $t=1$ と置けば $xf_x+yf_y=nf$ となる.

(2) $F(t)=f(tx,ty)$ $(t>0)$ と置くと仮定より

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t)&=\frac{d}{dt}\big[f(tx,ty)\big]=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\\&=\frac{1}{t}\left(tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\right)=\frac{n}{t}f(tx,ty),\end{aligned}$$

従って $F(t)$ は $tdF/dt=nF$ を満たす．さらに $t>0$ に於いて

$$\frac{d(t^{-n}F)}{dt}=-nt^{-n-1}F+t^{-n}\frac{dF}{dt}=-nt^{-n-1}F+nt^{-n-1}F=0$$

だから，$F(t)=Ct^n$ (C は定数) と表される．ここで $t=1$ と置けば $f(x,y)=C$ だから $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$．よって f は n 次斉次函数である. □