【問題】各 $u_i(x)$ 及びその導関数 $u_i'(x)$ は区間 $(0,1)$ 上で連続であって

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

が区間 $(0,1)$ 上の一様収束級数であるとする．このとき次を証明せよ．

1) $0 < a < b < 1$ とすると

$$\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots + \int_a^b u_n(x)dx + \cdots$$

は収束し，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ に等しい．

2) 更に

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x) + \cdots$$

も区間 $(0,1)$ 上で一様収束級数であれば f は連続的微分可能である．

(S58 北海道大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 $I = (0,1)$ とし，$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ とする．

1) $J = [a,b]$ とし，J 上の連続関数 f に対し $\|f\| = \sup_{x\in J}|f(x)|$ と置く．三角不等式と仮定より

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx\right| &= \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx\right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - s_n(x)|\,dx \le \|f - s_n\|(b-a) \to 0 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

従って $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ となる．

2) I 上の関数 f に対し $\|f\| = \sup_{x\in I}|f(x)|$ と置く．$a \in I$ および任意の正数 ε を固定する．

s_n' の連続性より $|s_n'(x) - s_n'(a)| < \varepsilon/4$ $(|x-a| < \delta)$ となる $\delta > 0$ が存在する．また s_n' の一様収束極限を g とすれば $\|g - s_n'\| < \varepsilon/4$ $(n \ge n_1)$ となる n_1 が存在する．次に平均値の定理と仮定より

$$\begin{aligned}|s_n(x) - s_m(x) - s_n(a) + s_m(a)| &= |s_n'(c) - s_m'(c)||x-a| \\ &\le |x-a|\|s_n' - s_m'\| < |x-a|\frac{\varepsilon}{3} \qquad (n,m \ge n_2,\ x\in I)\end{aligned}$$

となる n_2 が存在する．$n\to\infty$ とすれば

$$|f(x) - f(a) - (s_m(x) - s_m(a))| \le |x-a|\frac{\varepsilon}{4} \qquad (m \ge n_2,\ x \in I) \tag{1}$$

となる．$n \ge \max\{n_1, n_2\}$ となる n，及び $|x-a| < \delta$ なる x に対し平均値の定理より

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a) - g(a)(x-a)| &\le |f(x) - f(a) - s_n(x) + s_n(a)| + |s_n'(c)(x-a) - g(a)(x-a)| \\ &\le |x-a|\left(\frac{\varepsilon}{4} + |s_n'(c) - s_n'(a)| + \frac{\varepsilon}{4}\right)\end{aligned}$$

かつ $c \in (a,x)$ となる c が存在する．$|c-a| < \delta$ より $|s_n'(c) - s_n'(a)| < \varepsilon/4$ だから

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - g(a)\right| \le \frac{2\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

故に $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g(a)$ となる．

よって f は I 上微分可能で $f' = g$ となる．s_n' は連続だから g も連続となり，故に f は C^1 級である． □

【問題】$[0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f_n(x) \quad (n=1,2,\cdots)$ が $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq M+\infty$ とすると，次の事を示せ.

1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ は存在して下半連続である．ただし f が $x=x_0$ で下半連続であるとは，“ 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を適当にとれば $|x-x_0|<\delta$ なる限り $f(x_0)-\varepsilon<f(x)$ とできる ” 事である.

2) もし f が連続ならば f_n は f に一様収束している.

(S55 北海道大学理学研究科 数学専攻)

【解答】 $I=[0,1]$ とし，$x\in I$，$\delta>0$ に対し $I_\delta(x)=I\cap[x-\delta,x+\delta]$ と置く.

1) $x_0\in I$，$\varepsilon>0$ とする．有界な単調数列は収束するから，各 $x\in I$ について $f(x)\in\mathbb{R}$ 及び $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3 \quad (n\geq n_x)$ となる正整数 n_x が存在する．$n_0=n_{x_0}$ と置くとき，f_{n_0} の連続性より $|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\varepsilon/3 \quad (x\in I_\delta(x_0))$ となる $\delta>0$ が存在する．$|x-x_0|<\delta$ となる任意の $x\in[0,1]$ に対し $n'_x=\max\{n_0,n_x\}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
f(x_0)-f(x) =& f(x_0)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f(x)\\
\leq& |f(x_0)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f_{n_0}(x)|+|f_{n'_x}(x)-f(x)|<3\times\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって f は x_0 で下半連続である.

2) $\varepsilon>0$ とする．各 $x\in I$ について $f(x)-f_n(x)<\varepsilon/3 \quad (n\geq n_x)$ となる正整数 n_x が存在する．また $x\in I$ に対し

$$
|f_{n_x}(y)-f_{n_x}(x)|<\varepsilon/3,\quad |f(y)-f(x)|<\varepsilon/3 \qquad (y\in I_{\delta_x}(x))
$$

となる $\delta_x>0$ が存在する．$\{I_{\delta_x}(x)\}_{x\in I}$ は I の開被覆だから，有限部分被覆 $\{I_{\delta_{x_i}}(x_i)\}_{i=1,\cdots,m}$ が存在．$\delta_i=\delta_{x_i}$ と置き，$n_{x_1},\cdots,n_{x_m}$ の最大値を N とすれば，任意の $x\in[0,1]$ に対し $x\in I_{\delta_i}(x_i)$ となる i をとれば

$$
f(x)-f_N(x)\leq|f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-f_N(x_i)|+|f_N(x_i)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon
$$

となる．n に関する単調性より $n\geq N$ なる任意の n に対し $f(x)-f_n(x)\leq f(x)-f_N(x)<\varepsilon \quad (x\in I)$．従って f_n は f に一様収束する. $\square$