【問題】 以下の問に答えよ．

(1) α を正の実数とするとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}e^{-t}=0$ が成り立つ事を示せ．

(2) n を 2 以上の自然数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^n}dx$ の値を求めよ．

(3) n を 2 以上の自然数とするとき，広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^n dx$ の値を求めよ．

(H28 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】 (1) $t>1$ だとする．$\alpha=n$ (n は 1 以上の整数) のとき，$\displaystyle e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\geq\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ より

$$0<t^ne^{-t}=\frac{t^n}{e^t}\leq\frac{(n+1)!}{t}\ \longrightarrow\ 0\qquad(t\to\infty)$$

となる．一般の α について $\alpha\leq n$ となる自然数 n をとれば $0<t^{\alpha}e^{-t}\leq t^ne^{-t}$ となるから，上の結果と併せて $t^{\alpha}e^{-t}\to 0$ $(t\to\infty)$ となる．

(2) $\displaystyle I_n=\int_1^{\infty}\frac{\log x}{x^n}dx$ と置く．$x=e^t$ とすると $t=\log x$，$dx=e^tdt$，$1\to x\to\infty\ \Leftrightarrow\ 0\to t\to\infty$ より

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\infty}\frac{t}{e^{nt}}e^tdt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T te^{-(n-1)t}dt\\
&=\lim_{T\to\infty}\left(\left[-\frac{te^{-(n-1)t}}{n-1}\right]_0^T+\frac{1}{n-1}\int_0^T e^{-(n-1)t}dt\right)\\
&=\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{Te^{-(n-1)T}}{n-1}-\frac{1}{(n-1)^2}(e^{-(n-1)T}-1)\right)=\frac{1}{(n-1)^2}\qquad(\because\ (1)\text{ より}).
\end{aligned}$$

(3) 部分積分と (1) の評価より

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^n e^tdt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T t^ne^{-(n-1)t}dt\\
=&\lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{n-1}t^ne^{-(n-1)t}\right]_0^T+\frac{n}{n-1}\int_0^T t^{n-1}e^{-(n-1)t}dt\right\}=\frac{n}{n-1}\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-(n-1)t}dt\\
=&\frac{n}{n-1}\lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{n-1}t^{n-1}e^{-(n-1)t}\right]_0^T+\frac{n-1}{n-1}\int_0^T t^{n-2}e^{-(n-1)t}dt\right\}=\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n-1}\int_0^{\infty}t^{n-2}e^{-(n-1)t}dt\\
=&\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n-1}\lim_{T\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{n-1}t^{n-2}e^{-(n-1)t}\right]_0^T+\frac{n-2}{n-1}\int_0^T t^{n-3}e^{-(n-1)t}dt\right\}\\
&\qquad=\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n-1}\frac{n-2}{n-1}\int_0^{\infty}t^{n-3}e^{-(n-1)t}dt\\
=&\ \cdots\ =\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n-1}\cdots\frac{n-(n-2)}{n-1}\int_0^{\infty}e^{-(n-1)t}dt\ =\ \frac{n!}{(n-1)^n}\left[-\frac{1}{n-1}e^{-(n-1)t}\right]_0^{\infty}
\end{aligned}$$

問題の広義積分を $x=e^t$ と置換すれば，

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^n dx=\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{e^t}\right)^n e^tdt=\frac{n!}{(n-1)^{n+1}}.$$

□

【問題】　(1)　閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に関する中間値の定理を述べよ．

(2)　$f(x), g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で，$[a,b]$ 上で $g(x) \geq 0$ であるならば

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

となるような $\xi \in [a,b]$ が存在することを証明せよ．

(3)　$f(x), g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で定義された C^1 級の関数で，$g(x)$ が単調増加ならば

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = g(a)(f(\xi)-f(a)) + g(b)(f(b)-f(\xi))$$

となるような $\xi \in [a,b]$ が存在することを証明せよ．

(4)　$0 < a < b$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx = 0$$

となることを証明せよ．

(H21 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】 (1) (中間値の定理) m, M をそれぞれ $f(x)$ の $[a,b]$ での最小値，最大値とするとき，$m \leq y \leq M$ となる任意の y に対し $f(\xi) = y \quad (a \leq \xi \leq b)$ となる ξ が存在する．　□

(2) $g(x)$ が恒等的に 0 ならば明らかだから，$g(x) > 0$ となる x がある，即ち $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$ であるとする．m, M をそれぞれ $f(x)$ の最小値，最大値とすると $g(x) \geq 0$ である事から $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$，従って

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx, \qquad \therefore \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b Mg(x)dx} \leq M.$$

中間値の定理より $\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b Mg(x)dx} = f(\xi)$，従って $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b Mg(x)dx$ となる $\xi \in [a,b]$ が存在する．

(3) 定積分に対する部分積分を用いて

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$g(x)$ が単調増加，従って $g'(x) \geq 0$ より最右辺に第 2 項に (2) を用いると

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(\xi)\int_a^b g'(x)dx = f(\xi)(g(b)-g(a))$$

となる $\xi \in [a,b]$ が存在し，

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - f(\xi)(g(b)-g(a)) = g(a)(f(\xi)-f(a)) + g(b)(f(b)-f(\xi))$$

となる．

(4) $0 < a \leq x \leq b$ のとき，$-\dfrac{1}{x}$ は単調増加だから，(3) より各 n に対し

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{-x}dx = \int_a^b (-\frac{1}{n}\cos nx)' \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{an}(\cos n\xi_n - \cos na) + \frac{1}{bn}(\cos nb - \cos n\xi_n)$$

これより

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \frac{\sin nx}{-x}dx\right| &\leq \left|\frac{1}{an}(\cos n\xi_n - \cos na)\right| + \left|\frac{1}{bn}(\cos nb - \cos n\xi_n)\right| \\ &\leq \frac{2}{an} + \frac{2}{bn} = \frac{2}{nab}(a+b)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b \frac{\sin nx}{-x}dx\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2}{nab}(a+b) = 0, \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{\sin nx}{x}dx = 0.$$

□

【問題】 以下の問の答えよ．

(1) $0<x<1$ とする．$0<r_1\le r_2$ に対して $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} x^r dr$ を求めよ．

(2) $0<p\le q$ とするとき，$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^q-x^p}{\log x}dx$ を求めよ．ただし以下の事実 (i) (ii) を用いてもよい．

(i) $[0,1]\times[p,q]$ で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^y & (0<x\le 1,\ y\in[p,q]) \\ 0 & (x=0,\ y\in[p,q]) \end{cases}$$

は連続関数である．

(ii) 定理 A： $f(x,y)$ が $[a,b]\times[c,d]$ で連続なら

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

が成り立つ．

(3) 微積分学の基本定理を用いて上記 (2) (ii) の定理 A を証明せよ．ただし証明中どこで微積分学の基本定理を用いているかを明示せよ．
(ヒント：

$$\varphi(x,y)=\int_c^y f(x,t)dt,\qquad \Phi(y)=\int_a^b\varphi(x,y)dx$$

と置くと

$$\frac{d\Phi}{dy}=\int_a^b\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)dx$$

となる事を用いてもよい.)

(H18 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】 (1) $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} x^r dr=\Big[\frac{x^r}{\log x}\Big]_{r_1}^{r_2}=\frac{x^{r_1}-x^{r_2}}{\log x}$.

(2) $f(x,y)$ を (i) のように置くとき，(1) の結果と (ii) より

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^q-x^p}{\log x}dx&=\int_0^1\left(\int_p^q x^y dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_p^q f(x,y)dy\right)dx\\&=\int_p^q\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=\int_p^q\frac{1}{y+1}dy=\log\frac{q+1}{p+1}.\end{aligned}$$

(3) 微積分学の基本定理より

$$\int_c^d\frac{d\Phi}{dy}(y)dy=\Phi(d)-\Phi(c),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_c^y f(x,t)dt\right)=f(x,y).$$

$\displaystyle\Phi(c)=\int_a^b\varphi(x,c)dx=0,\ \ \Phi(d)=\int_a^b\varphi(x,d)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx&=\Phi(d)=\int_c^d\frac{d\Phi}{dy}(y)dy\\&=\int_c^d\left(\int_a^b\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)dx\right)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.\end{aligned}$$

□

【問題】

(1) $x > 0,\ y > 0$ とするとき, $|e^{-x} - e^{-y}| \leq |x - y|$ が成り立つ事を示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ が収束する事を示せ.

(3) $f(x)$ を $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とする.

(i) $0 < \alpha < \beta$ とするとき

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx = f(\gamma) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$$

を満たす γ が $\alpha < \gamma < \beta$ の範囲に存在する事を示せ.

(ii) $0 < \delta < T,\ 0 < a < b$ とするとき

$$\int_{\delta}^{T} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dx}{x} - \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx$$

を満たす ξ が $a\delta < \xi < b\delta$ の範囲に存在する事を示せ.

(4) $0 < a < b$ とするとき

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \lim_{\delta \to 0,\ T \to \infty} \int_{\delta}^{T} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log \frac{b}{a}$$

である事を示せ.

(H17 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】 (1) $x = y$ のときは自明. また不等式は x, y について対称だから, $x < y$ と仮定してもよい. $f(t) = e^{-t} + t$ $(t > 0)$ と置くと, $1 < e^t,\ e^{-t} < 1$ より $f'(t) = -e^{-t} + 1 > 0$. 従って狭義単調増加だから $x < y$ ならば $e^{-x} + x < e^{-y} + y,\ e^{-x} - e^{-y} < y - x$. $x - y < 0 < e^{-x} - e^{-y}$ と併せて $-(y - x) < e^{-x} - e^{-y} < y - x,\ |e^{-x} - e^{-y}| < |x - y|$ となる.

(2) $0 < u < v < \infty$ に対し

$$\int_u^v \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-v}}{v} - \int_u^v \frac{e^{-x}}{x^2} dx \leq \frac{e^{-u}}{u} \longrightarrow 0 \qquad (u \to \infty)$$

だから $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ は収束する.

(3) (i) $[\alpha, \beta]$ に於ける $f(x)$ の最大値, 最小値をそれぞれ m, M とする. このとき

$$\frac{m}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{M}{x}, \qquad m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \leq M \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$$

より $\mu = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)}{x} dx \Big/ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x}$ とすれば $m \leq \mu \leq M$ となる. 中間値の定理より $\mu = f(\gamma),\ \alpha \leq \gamma \leq \beta$ となる γ が存在する.

(ii)

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{T} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\delta}^{T} \frac{f(ax)}{ax} d(ax) - \int_{\delta}^{T} \frac{f(bx)}{bx} d(bx) = \int_{a\delta}^{aT} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{b\delta}^{aT} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{b\delta}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx \end{aligned}$$

最右辺の第 1 項に (i) を適用すれば

$$\int_{\delta}^{T} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(\xi) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dx}{x} - \int_{aT}^{bT} \frac{f(x)}{x} dx, \qquad a\delta < \xi < b\delta$$

を満たす ξ が存在する.

(4) (3) より $0 < \delta < T < \infty$ に対し

$$\int_{\delta}^{T} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \leq e^{-\xi} \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dx}{x} - \int_{aT}^{bT} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq e^{-\xi} \log \frac{a}{b} - \int_{aT}^{bT} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

となる $a\delta < \xi < b\delta$ が存在する． $\delta \to 0+0$ ならば $\xi \to 0$， $e^{-\xi} \to 1$ であり，一方，(2) で見たように $\displaystyle\int_{aT}^{bT} \frac{e^{-x}}{x}dx \to 0$ $(T \to \infty)$ となるから，

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \lim_{\substack{\delta\to 0+0 \\ T\to\infty}} \int_\delta^T \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}dx = \log\frac{a}{b} \lim_{\delta\to 0+0} e^{-\xi} - \lim_{T\to\infty} \int_{aT}^{bT} \frac{e^{-x}}{x}dx = \log\frac{a}{b}.$$

□

【問題】

(1) $f(x)=\tan^{-1}x$ のとき，$f^{(n)}(0)$ の値を求めよ．

(2) 有界閉区間 $[a,b]$ で $f(x)$ を連続とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}=\sup_{a\le x\le b}|f(x)|$$

である事を示せ．

(H10 千葉大理学研究科基盤理学専攻)

【解答】 (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ より

$$f(x)=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

より $f^{(2n)}(0)=0$，$f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!$ $(n=0,1,2,\dots)$．

(2) $M=\sup_{a\le x\le b}|f(x)|$ と置く．

$$\left\{\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}\le\left\{\int_a^b M^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}=M(b-a)^{\frac{1}{n}},\qquad \therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}\le M\lim_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}=M$$

一方，f は連続だから $M=|f(x_0)|$ となる $x_0\in[a,b]$ が存在し，更に任意の $\varepsilon>0$ に対し

$$M-\varepsilon<|f(x)|\qquad (x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b])$$

となる $\delta>0$ が存在する．$[c,d]=[x_0-\delta,x_0+\delta]\cap[a,b]$ と置けば

$$\int_a^b |f(x)|^n dx\ge\int_c^d |f(x)|^n dx\ge\int_c^d (M-\varepsilon)^n dx=(M-\varepsilon)^n(d-c).$$

$$\therefore\quad \left\{\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}\ge(M-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{n}},\qquad \lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}\ge(M-\varepsilon)\lim_{n\to\infty}(d-c)^{\frac{1}{n}}=M-\varepsilon.$$

ε は任意だから，上の不等式と併せて $M\le\left\{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}\le M$，従って $\left\{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}=M$ となる． □