

【問題】 複素関数 $f(z) = \frac{z^4}{z^6 + 1}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 点 $z = e^{\frac{\pi i}{6}}$ における $f(z)$ の留数を求めよ.

(2) $R > 0$ として複素平面に於ける円 $|z| = R$ 上の点 R から正の向きに $Re^{\frac{\pi i}{3}}$ に至る円弧を C_1 とし, 点 $Re^{\frac{\pi i}{3}}$ から原点 O に至る線分を C_2 とする. このとき次の不等式と等式が成り立つ事をそれぞれ示せ. ただし $\omega = e^{\frac{\pi i}{6}}$ とする:

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^5}{R^6 - 1}, \quad \int_{C_2} f(z) dz = \omega^4 \int_0^R f(z) dz$$

(3) 広義積分 $I = \int_0^\infty f(x) dx$ の値を求めよ.

(2024 電気通信大学情報理工学域)

【解答】 (1) ω は 1 位の極だから $\operatorname{Res}_{z=\omega} f(z) = \frac{\omega^4}{6\omega^5} = \frac{1}{6\omega}$.

(2) C_1 は $z = Re^{it}$ ($0 \rightarrow t \rightarrow \frac{\pi}{3}$) と表される.

$$|R^6 e^{6it} + 1|^2 = |R^6 \cos 6t + 1 + iR^6 \sin 6t|^2 = R^{12} + 2R^6 \cos 6t + 1 \geq R^{12} - R^6 + 1 = |R^6 - 1|^2$$

より $|R^6 e^{6it} + 1| \geq |R^6 - 1|$. 従って

$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \leq \int_{C_1} |f(z)| |dz| = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{|Re^{it}|^4}{|R^6 e^{6it} + 1|} |iRe^{it}| dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{R^5}{|R^6 e^{6it} + 1|} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{R^5}{|R^6 - 1|} dt = \frac{\pi}{3} \frac{R^5}{|R^6 - 1|}$$

C_2 は $z = r\omega^2$ ($R \rightarrow t \rightarrow 0$) と表される. $\omega^{12} = e^{2\pi i} = 1$ より

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_R^0 \frac{r^4 \omega^8}{r^6 \omega^{12} + 1} \omega^2 dr = -\omega^{10} \int_R^0 \frac{r^4}{r^6 + 1} dr$$

$-\omega^{10} = -\omega^6 \cdot \omega^4 = \omega^4$ より $\int_{C_2} f(z) dz = \omega^4 \int_R^0 f(x) dx$.

(3) $R > 1$ とする. 区間 $[0, R]$, C_1 と C_2 をつなげて閉曲線 C を作る. C により囲まれる部分に含まれる $f(z)$ の極は ω のみ. 留数定理と (1) の結果より $\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\omega} f(z) = \frac{\pi i}{3\omega}$. 一方, 左辺について

$$\int_C f(z) dz = (1 + \omega^4) \int_0^R f(x) dx + \int_{C_2} f(z) dz$$

より (2) の結果から

$$\left| \frac{\pi i}{3\omega} - (1 + \omega^4) \int_0^R f(x) dx \right| = \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^5}{R^6 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\therefore I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx = \frac{\pi i}{3\omega(1 + \omega^4)} = \frac{\pi i}{6i \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}$$

□

【問題】 複素関数 $f(z) = \frac{e^{-iz}}{(z^2 + 1)^2}$ について以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ。

(2) 定数 $R > 0$ が (1) で求めた極の絶対値と異なるとき、複素積分 $\int_{|z|=R} f(z) dz$ (積分路は正の向きに 1 周) を求めよ。

(3) 実軸上での積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を求めよ。

(2023 電気通信大学編入)

【解答】 (1) $f(z)$ の極は $x = \pm i$ であり、それぞれ 2 位である。

(2) $0 < R < 1$ のときは Cauchy の積分定理より $\int_{|z|=R} f(z) dz = 0$ 。 $1 < R$ のとき

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} ((z - i)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-ie^{-iz}(z + i)^2 - 2e^{-iz}(z + i)}{(z + i)^4} = 0,$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} ((z - i)^2 f(z))' = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{-ie^{-iz}(z - i)^2 - 2e^{-iz}(z - i)}{(z - i)^4} = \frac{i}{2e}$$

留数定理より

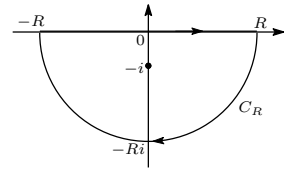
$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=i} + \operatorname{Res}_{z=-i} \right) f(z) = 2\pi i \cdot \frac{i}{2e} = -\frac{\pi}{e}$$

(3) $R > 1$ とする。下図のように実軸上 $-R$ から R への路と

$$C_R : z = Re^{-it} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

をつないだ閉路を C とする。 C で囲まれた領域内の極は $z = -i$ のみであり、 C は $z = -i$ に対し時計回りに 1 周しているから、留数定理より

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \frac{\pi}{e}$$



一方、左辺 $\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz$ の第 2 項について

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| = \int_0^\pi \frac{|e^{-iR(\cos t - i \sin t)}|}{|R^2 e^{-2it} + 1|^2} | -Rie^{-it} | dt$$

$$|R^2 e^{-2it} + 1|^2 = (R^2 \cos 2t + 1)^2 + R^4 \sin^2 2t = R^4 + 2R^2 \cos 2t + 1 \geq (R^2 - 1)^2 \text{ より}$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{Re^{-R \sin t}}{(R^2 - 1)^2} dt \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2}$$

だから

$$\left| \int_{-R}^R f(x) dx - \frac{\pi}{e} \right| = \left| - \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \quad \therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{e}$$

□

【問題】 複素関数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-i)}$ に対して以下の問いに答えよ。

- (1) $\sin i$ の実部と虚部を求めよ。
- (2) $f(z)$ のすべての極とそれぞれの極の位数を求めよ。
- (3) 複素積分 $\int_{|z|=2} f(z) dz$ (積分路は正の向きに 1 周) の値を求めよ。

(2022 電気通信大学編入)

【解答】 (1) $\sin i = \sin 0 \cdot \cosh 1 + i \cos 0 \sinh 1 = i \sinh(1) \left(= \frac{e - e^{-1}}{2} i \right)$.

(2) $f(z) = \frac{1}{i} \left(\frac{(z+i)\sin z}{z^2} - \frac{\sin z}{z-i} \right)$ について

- ・ $z=0$ の近傍で $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{\sin z}{z-i}$ は正則。また $\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$ と展開されるので $f(z)$ は $z=0$ で 1 位の極を持つ。
- ・ $z=i$ の近傍で $\frac{(z+i)\sin z}{z^2}$ は正則。また $\sin i \neq 0$ より $\frac{\sin z}{z-i}$ は $z=i$ で 1 位の極を持つ。
- ・ $z \neq 0, i$ の近傍で $f(z)$ は正則。

だから $f(z)$ は $z=0, i$ がそれぞれ 1 位の極となる。

(3) $\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = 1 \cdot \frac{1}{0-i} = i$, $\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = \frac{\sin i}{i^2} = -(\sinh(1))i$ と留数定理より

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=0} + \operatorname{Res} f(z) \Big|_{z=i} \right) = 2\pi i (i - (\sinh 1)i) = 2\pi (\sinh(1) - 1)$$

□