【問題】 次の問に答えよ．ただし i は虚数単位であり，e は自然対数の底，$\log$ は自然対数である．

I. 次の定積分 I を考える：

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{(2+\cos\theta)^2} \tag{1}$$

1. 定積分 I を複素数 z を用いて複素関数積分 $\oint_{|z|=1} G(z)dz$ の形に書き直したときの複素関数 $G(z)$ を求めよ．ただし積分路は単位円周上を反時計回りに 1 周するものとする．
2. $G(z)$ の全ての極とその位数，及び留数を求めよ．
3. 積分 I を求めよ．

II. 実数径数 α, β を持つ実数 θ の関数

$$f(\theta;\alpha,\beta) = 1 + e^{2i\beta} + \alpha e^{i(\theta+\beta)} \tag{2}$$

に対して以下の定積分 $F(\alpha,\beta)$ を考える：

$$F(\alpha,\beta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{d\theta}[\log f(\theta;\alpha,\beta)]. \tag{3}$$

1. 定積分 $F(\alpha,\beta)$ を複素数 z を用いて複素関数積分 $\oint_{|z|=1} G(z)dz$ の形に書き直したときの複素関数 $G(z)$ を求めよ．ただし積分路は単位円周上を反時計回りに 1 周するものとする．
2. $G(z)$ の全ての極とその位数，及び留数を求めよ．
3. 径数 α, β を場合分けをして $F(\alpha,\beta)$ の値を求めよ．但し極が積分路上にある場合は考えなくても良い．

(H29 東京大学工学研究科)

【解答】 I. 1. $z = e^{i\theta}$ と置く．

$$\cos\theta = (z+z^{-1})/2, \qquad 2+\cos\theta = (z^2+4z+1)/2z, \qquad \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4z^2}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}.$$

また $dz = ie^{i\theta}d\theta$ と $z^{-2}dz = -d(z^{-1}) = ie^{-i\theta}d\theta$ より $\cos\theta d\theta = \frac{1+z^{-2}}{2i}dz$ だから，

$$\frac{\cos\theta d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4z^2}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}\frac{1+z^{-2}}{2i}dz. = \frac{2}{i}\frac{z^2+1}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}dz.$$

従って $\underline{G(z) = \frac{2}{i}\frac{z^2+1}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}}$ とすれば $I = \oint_{|z|=1} G(z)dz$ となる．

I. 2. $G(z)$ の極は $z = -2\pm\sqrt{3}$ であり，位数はそれぞれ 2．各極に於ける留数は次の通り：

$$\operatorname*{Res}_{z=-2-\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to-2-\sqrt{3}}((z+2+\sqrt{3})^2 f(z))' = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{9}i},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f(z) = \lim_{z\to-2+\sqrt{3}}((z+2-\sqrt{3})^2 f(z))' = \underline{\frac{\sqrt{3}}{9}i}$$

I. 3. $|z|\le 1$ 内にある極は $z = -2+\sqrt{3}$ のみ．2 の結果と留数定理より

$$I = \oint_{|z|=1} G(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{3}} f(z) = \underline{-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi}.$$

II. $\alpha = 0$ かつ $\beta = \frac{\pi}{2} + n\pi \ (n\in\mathbb{Z})$ のとき $f(\theta) = 0$ となり，$\log f(\theta;\alpha,\beta)$ は定義されない．以下，この場合を除いて考える．

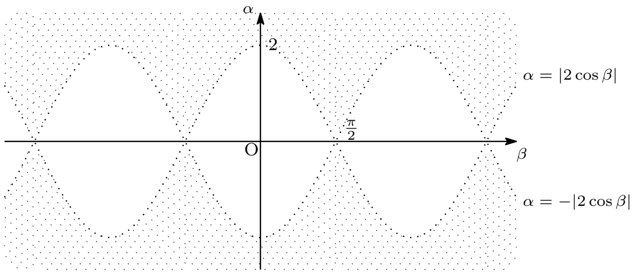
II. 1. $F(\alpha,\beta) = \int_0^{2\pi} \frac{f'(\theta;\alpha,\beta)}{f(\theta;\alpha,\beta)}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha i e^{i(\theta+\beta)}}{1+e^{2i\beta}+\alpha e^{i(\theta+\beta)}}d\theta$．$z = e^{it}$ $(0\le t\le 2\pi)$ と置く．

$$F(\alpha,\beta) = \int_{|z|=1} \frac{\alpha e^{i\beta}dz}{1+e^{2i\beta}+\alpha e^{i\beta}z} = \int_{|z|=1} \frac{\alpha dz}{\alpha z + e^{i\beta} + e^{-i\beta}}$$

より $\underline{G(z) = \frac{\alpha}{\alpha z + 2\cos\beta}}$ と置けば $F(\alpha,\beta) = \oint_{|z|=1} G(z)dz$ となる．

II. 2. $\alpha = 0$ のとき，$G(z) = 0$ は正則だから極はない．$\alpha \ne 0$ のとき，$\underline{z = -\frac{2}{\alpha}\cos\beta}$ が $G(z)$ の極であり，その位数は $\underline{1}$，留

数は $\underline{\quad 1 \quad}$ である.
II. 3.　留数定理より $F(\alpha,\beta) = \underline{\;2\pi i \quad (|2\cos\beta| < |\alpha| \text{ のとき}), \qquad 0 \quad (|2\cos\beta| > |\alpha| \text{ のとき})}.$



(点線部では $F(\alpha,\beta) = 2\pi i$, 白抜きの部分では $F(\alpha,\beta) = 0$)

□