【問題】 $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 2\}$ に反時計まわりの向きをつける．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z(1-z)}$ の値を求めよ．

(2) n を自然数とするとき，$\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^n(1-z)^n}$ の値を求めよ．

(3) n, m を自然数とするとき，$\displaystyle\int_\Gamma \frac{(1-z)^m}{z^n}dz$ の値を求めよ．

(H19 首都大理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) 中心を $a \in \mathbb{C}$, 半径を $\varepsilon > 0$ とする反時計まわりの向きを付けた円周を $\partial_\varepsilon(a)$ と記すことにする．任意の $a \in \mathbb{C}$ に於いて $z = \varepsilon e^{2\pi i t} + a \ \ (0 \leq t \leq 1)$ とすれば

$$\oint_{\partial_\varepsilon(a)} \frac{dz}{z-a} = \int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi i t}dt}{e^{2\pi i t}} 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i$$

となる．これと $\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}$，さらに Cauchy の積分定理より

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z(1-z)} = \int_\Gamma \frac{dz}{z} - \int_\Gamma \frac{dz}{z-1} = \int_{\partial_\epsilon(0)} \frac{dz}{z} - \int_{\partial_\epsilon(1)} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i - 2\pi i = \underline{\ 0\ }$$

(2) Γ で囲まれる領域の内部に於いて被積分関数は $z = 0, 1$ にのみ n 位の極に持つから，留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dz}{z^n(1-z)^n} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^n(1-z)^n} + \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z^n(1-z)^n}$$

右辺の第 1 項は $z = 0$ が n 位の極である事から

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^n(1-z)^n} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^n \cdot \frac{1}{z^n(1-z)^n}\right) = \frac{n(n+1)\cdots(n+n-2)}{(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1}$$

同様の計算により右辺の第 2 項は $\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z^n(1-z)^n} = (-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}$ となる事が分かる．従って

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^n(1-z)^n} = \underline{2\pi i\{1 + (-1)^{n-1}\}\binom{2n-2}{n-1}}$$

(3) 被積分関数の Γ で囲まれる領域の内部での孤立特異点は $z = 0$ のみだから，留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{(1-z)^m}{z^n}dz = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(1-z)^m}{z^n}.$$

被積分関数の分子に二項定理を適用すれば

$$\frac{(1-z)^m}{z^n} = \frac{1}{z^n}\left\{1 - \binom{m}{1}z + \cdots + (-1)^k\binom{m}{k}z^k + \cdots + (-1)^m z^m\right\}$$

であり，$m < n-1$ のとき -1 次の項はないので $z = 0$ に於ける留数は 0．$m \geq n-1$ のとき

$$\frac{(1-z)^m}{z^n} = \frac{1}{z^n} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1}\frac{1}{z} + (-1)^n\binom{m}{n} + (-1)^{n+1}\binom{m}{n+1}z + \cdots + (-1)^m z^{m-n}$$

より $z = 0$ に於ける留数は $(-1)^{n-1}\binom{m}{n-1}$ となる．従って

$$\oint_\Gamma \frac{(1-z)^m}{z^n}dz = \underline{\begin{cases} 0 & (m < n-1) \\ (-1)^{n-1}2\pi i\binom{m}{n-1} & (m \geq n-1) \end{cases}}$$

□

【問題】 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4iz-1}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ の各特異点における留数を求めよ．

(2) θ を実数とするとき $ie^{i\theta}f(e^{i\theta})=\dfrac{1}{2\sin\theta-4}$ であることを示せ．

(3) 曲線 C は円 $|z|=1$ で，向きを正の向き (反時計回り) とするとき，複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\sin\theta}$ の値を求めよ．

(H21 首都大理学研究科 数学専攻)

【解答】(1) $z^2-4iz-1=(z-2i)^2-(\sqrt{3}i)^2=\{z-(2+\sqrt{3})i\}\{z-(2-\sqrt{3})i\}$ より $z=(2\pm\sqrt{3})i$ はそれぞれ $f(z)$ の 1 位の極となる．

$$\operatorname*{Res}_{z=(2\pm\sqrt{3})i}f(z)=\lim_{z\to(2\pm\sqrt{3})i}(z-(2\pm\sqrt{3})i)f(z)=\lim_{z\to(2\pm\sqrt{3})i}\frac{1}{z-(2\mp\sqrt{3})i}=\underline{\pm\frac{1}{2\sqrt{3}i}}$$

(2) $e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta$ より

$$ie^{i\theta}f(e^{i\theta})=\frac{ie^{i\theta}}{e^{2i\theta}-4ie^{i\theta}-1}=\frac{i}{e^{i\theta}-4i-e^{-i\theta}}=\frac{i}{2i\sin\theta-4i}$$

したがって $ie^{i\theta}f(e^{i\theta})=\frac{1}{2\sin\theta-4}$ となる．

(3) $1<2+\sqrt{3}$, $0<2-\sqrt{3}<1$ と留数定理より $\displaystyle\oint_C f(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=(2-\sqrt{3})i}f(z)=\underline{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$

(4) $z=e^{i\theta}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ とすれば，(2) より，(3) の積分は

$$\oint_C f(z)dz=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cdot ie^{i\theta}d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\sin\theta}$$

と表される． これと (3) の結果より

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2-\sin\theta}=-2\oint_C f(z)dz=\underline{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

□

【問題】 R を 2 以上の実数とする．複素平面上の, 原点を中心とする半径 R の円の上半分 C_R と実軸上の線分 $[-R, R]$ を合わせた積分路を C とする．ただし積分路は反時計回りとする．また $f(z) = \dfrac{1}{z^4+4}$ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz$ を求めよ．

(3) 実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4}$ を求めよ．

(H22 首都大理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $z^4+4 = (z-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i})$ より，C で囲まれる領域内の $f(z)$ の孤立特異点は $z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}, \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ の 2 つであり，それぞれ 1 位の極となる．

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} f(z) &= \lim_{z\to\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}(z-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})f(z) = \lim_{z\to\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}\frac{1}{(z-\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i})}\\
&=\frac{1}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}-\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i})(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i})(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}-\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i})}\\
&=\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{2\sqrt{2}(1-i)(1+1)(1+i)} = -\frac{1+i}{16}\\
\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}} f(z) &= \lim_{z\to\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}(z-\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i})f(z) = \lim_{z\to\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}\frac{1}{(z-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i})(z-\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i})}\\
&=\frac{1}{(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}-\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i})(\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}-\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i})}\\
&=-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{2\sqrt{2}(1-i)(i+1)(i+i)} = \frac{1-i}{16}
\end{aligned}$$

と留数定理より

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}} f(z)\right) = 2\pi i\left(-\frac{1+i}{16}+\frac{1-i}{16}\right) = \underline{\frac{\pi}{4}}$$

(2) $|(Re^{i\theta})^4+4|^2 = (R^4e^{i\theta}+4)(R^4e^{-i\theta}+4) = R^8+2R^4\cos4\theta+16$ より

$$\left|\int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+4}d\theta\right| \le \int_0^\pi \frac{R}{\sqrt{R^8+2R^4\cos4\theta+16}}d\theta \le \frac{1}{R}\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{R^4+2\cos4\theta}} \le \frac{1}{R}\frac{\pi}{\sqrt{R^4-2}}$$

$R\to\infty$ とすれば最右辺は 0 に収束するから

$$\lim_{R|to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R|to\infty}\int_0^\pi\frac{iRe^{i\theta}}{R^4e^{4i\theta}+4}d\theta = \underline{0}$$

(3) $\displaystyle\oint_C f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+4} + \int_{C_R} f(z)dz$，(1)，及び (2) の結果より

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4}-\frac{\pi}{4}\right| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4}-\oint_C f(z)dz\right|\\
&\le \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4}-\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x^4+4}\right| + \left|-\int_{C_R} f(z)dz\right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

従って $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+4} = \underline{\frac{\pi}{4}}$ □