【問題】

(1) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$$

(2) n を 3 以上の自然数とするとき, $z^n - e^z$ の零点は円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$ に n 個あることを示せ.

(3) 整関数 $f(z)$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $f(z) \neq 0$ となるとき, ある整関数 $g(z)$ が存在して

$$f(z) = e^{g(z)} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示せ. ただし整関数とは全平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数である.

(H14 九州大学大学院数理学府)

【解答】 (1) $f(z) = -2i/(z^2+4z+1)$ とする. $C : z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq frm{-}e\pi)$ とすれば

$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{-2i}{e^{2i\theta}+4e^{i\theta}+1} ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{4+e^{i\theta}+e^{-i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

となる. $f(z)$ は C の内部で $z = 2-\sqrt{3}$ にのみ 1 位の極を持ち, その留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=2-\sqrt{3}} f(z) = \lim_{\substack{z\to 2-\sqrt{3} \\ z\neq 2-\sqrt{3}}} \frac{-2i}{z-2-\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

だから, 留数定理より

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{i}\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2-\sqrt{3}} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

(2) $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について

$$|-e^z| = e^{2\cos\theta} \leq e^2 \leq (2.72)^2 = 7.3984 < 2^3 \leq |z|^n \quad (n \geq 3)$$

だから, Rouché の定理より $\{z \in \mathbb{Z} : |z| < 2\}$ に於ける z^n と $z^n - e^z$ の零点の個数は一致する. $z = 0$ は z^n の n 位の零点だから, $z^n - e^z$ の $\{z \in \mathbb{Z} : |z| < 2\}$ 内の零点は n 個である.

(3) $g_1(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$ と置く. Cauchy の積分定理より $g_1(z)$ は整関数を定める.

$$(f(z)e^{-g_1(z)})' = f'(z)e^{-g_1(z)} + f(z)\left(-\frac{f'(z)}{f(z)}\right)e^{-g_1(z)} = 0$$

より $f(z)e^{-g_1(z)} = C$ (C は定数) と表される. $C = f(0)e^{-g_1(0)} = f(0)e^0 \neq 0$ だから $C = e^c$ となる $c \in \mathbb{C}$ がとれる. ここで $g(z) = g_1(z) + c$ と置けば $g(z)$ は整関数であり, かつ $f(z) = e^{g(z)}$ となる. $\square$