【問題】 Let $p < q$ be distinct primes with $q \not\equiv 1 \pmod{p}$.

(a) Show that every group of order pq is cyclic.

(b) Let G be a group and let H be a subgroup of the center of G. Suppose that G/H is cyclic. Show that G is abelian.

(c) Let r be a prime distinct from p and q, and let G be a nonabelian group of order pqr. Show that the center of G has order $1, p$, or q.

(2010 Dep.Math Univ.of Maryland)

【解答】 (a) G を位数 pq の群とする．Sylow の第 1 定理より位数 p, q の部分群 H, K が存在する．H, K の共役類の個数を N, M とすれば，Sylow の第 3 定理より $N \equiv 1 \mod p$, $M \equiv 1 \mod q$ かつ $N, M \mid \sharp G = pq$ となる．N は pq の約数だから N は 1 または q となるが，q に対する仮定より $N \neq q$ だから $N = 1$，即ち H は G の正規部分群となる．同様に $M = 1$，即ち K も G の正規部分群となる．今 H, K の任意の生成元 h, k をとれば

$$khk^{-1} \cdot h^{-1} \in H, \qquad k \cdot hk^{-1}h^{-1} \in K, \qquad \therefore \quad khk^{-1}h^{-1} \in H \cap K = \{e\}$$

従って $hk = kh$ となる．ここで $g = hk$ とすれば

$$g^p = h^p k^p = k^p \neq e, \qquad g^q = h^q k^q = h^q \neq e, \qquad g^{pq} = h^{pq} k^{pq} = e$$

より g の位数は pq となり，従って G は巡回群となる．

(b) 仮定より $G/H = < gH >$ となる $g \in G$ が存在する．さらに G の任意の元は $g^n h \ \ (n \in \mathbb{Z}, h \in H)$ と表される．このとき G の任意の元 $g^n h, g^m k \ \ (n, m \in \mathbb{Z}, h, k \in H)$ をとれば H が G の中心に含まれる事から

$$g^n h \cdot g^m k = g^n g^m hk = g^m g^n kh = g^m k \cdot g^n h.$$

したがって G は可換である．

(c) G の中心を Z とする．G が非可換という仮定より $Z \subsetneq G$ となる．仮に $r \mid \sharp Z$ だとすれば Z に含まれる部分群 H で $r \mid \sharp H$ となるものが存在する．このとき G/H は (a) より巡回群となり，(b) より G は可換となるが，これは G が非可換という仮定に反する．故に $r \not| \sharp Z$，即ち Z の位数は $1, p, q, pq$ のいずれかになる．さらに $\sharp Z = pq$ と仮定すると G/Z の位数は r，従って巡回群となり，再び (b) により G が可換となって矛盾する．故に $\sharp Z$ は $1, p, q$ のいずれかになる． $\square$