

【問題】 $K[x]$ を体 K 上の多項式環とし, $f(x) = x^3 + x + 1 \in K[x]$ の生成するイデアルを $(f(x))$ とする. このとき剰余環 $R = k[x]/(f(x))$ について, 以下の間に答えよ.

- (1) K が 2 元体 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ のとき, R は体である事を示せ.
- (2) K が 3 元体 $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ のとき, R は体でない事を示せ.
- (3) $K = \mathbb{F}_3$ のとき, 環 R の単元群 $U(R)$ の位数を求めよ.

(H28 筑波大数理物質科学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) (2) R は体 $\Leftrightarrow (f(x))$ は素イデアル $\Leftrightarrow f(x)$ は K 上既約 となる. $K = \mathbb{F}_2$ の場合, $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$ より $f(x)$ は K 既約. 従って R は体となる. 一方, $K = \mathbb{F}_3$ の場合, $f(1) = 0$. 従って $f(x) = (x+2)(x^2+x+2)$ となるので, R は体ではない.

(3) R の元は 2 次式で代表されるから, 2 次式についてのみ調べればよい. 先ず定数は 0 以外単元である. また $x(-1-x^2) = -x-x^3 = 1$ より $\pm x \in U(R)$ ($x^{-1} = -1-x^2$). 従って

- (i) $\pm x^2 \in U(R)$ ($x^{-2} = (1+x^2)^2 = 1-x+x^2$)
- (ii) $\pm x^3 = \pm(-1-x) \in U(R)$ ($x^{-3} = -(1+x^2)^3 = 1+x-x^2$)
- (iii) $\pm x^4 = \pm(-x-x^2) \in U(R)$ ($x^{-4} = (1+x^2)^4 = -x-x^2 = x^4$)
- (iv) $\pm x^5 = \pm(1+x-x^2) \in U(R)$ ($x^{-5} = -(1+x^2)^5 = -1-x = x^3$)
- (v) $\pm x^6 = \pm(1-x+x^2) \in U(R)$ ($x^{-6} = (1+x^2)^6 = x^2$)
- (vi) $\pm x^7 = \pm(-1-x^2) \in U(R)$ ($x^{-7} = -(1+x^2)^7 = x$)
- (vii) $x^8 = 1$

となる. 次に残りの 5 種

$$\pm(x-1), \quad \pm(x^2-x), \quad \pm(x^2-x), \quad \pm(x^2+x+1), \quad \pm(x^2+x-1)$$

について調べる. $g = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R$, $h = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in R$ の積は

$$gh = a_0b_0 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + (a_0b_1 + a_1b_0 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 2a_2b_2)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + 2a_2b_2)x^2$$

と表される事に注意する.

$g = 1-x$ のとき, $gh = b_0 + b_2 + (b_1 - b_0 + b_2)x + (b_2 - b_1)x^2$. $gh = 1$ ならば $b_0 + b_2 = 1$ かつ $b_1 - b_0 + b_2 = 0$ かつ $b_2 - b_1 = 0$ となるが, これらを満たす b_0, b_1, b_2 は存在しないので $g \notin U(R)$ となる. $x^2 - 1 \in U(R)$ だとすると $x-1 = (x^2-1)(x+1)^{-1} \in U(R)$ より矛盾. また $x^2 - x \in U(R)$ だとすると $x-1 = (x^2-x)x^{-1} \in U(R)$ より矛盾するから, $x-1, x^2-1, x^2-x \notin U(R)$ となる.

$g = \pm 1 + x + x^2$ のとき, $gh = \pm b_0 - b_1 - b_2 + (\pm b_1 + b_0 - b_1 + b_2)x + (\pm b_2 + b_1 + b_0 - b_2)x^2$. $g = 1 + x + x^2$ のとき $gh = 1$ ならば $b_0 - b_1 - b_2 = 1$ かつ $b_0 + b_2 = 0$ かつ $b_1 + b_0 = 0$ となるが, これらを満たす b_i は存在しない. 更に $g = -1 + x + x^2$ のとき $gh = 1$ ならば $b_0 + b_1 + b_2 = -1$ かつ $b_0 + b_1 + b_2 = 0$ かつ $b_1 + b_0 + b_2 = 0$ となるが, これらを満たす b_i も存在しない.

よって上述の 5 種類は $U(R)$ に属さない. 以上より $U(R) = \{\pm x^i : i = 0, 1, \dots, 7\}$. $\therefore \#U(R) = 16$. □

【問題】 $\mathbb{Q}[x, y]$ を有理数体 \mathbb{Q} 上の 2 変数多項式環とし, $\mathbb{Q}[x, y]$ の部分集合 I を

$$I = \{f \in \mathbb{Q}[x, y] : f(0, 0) = 0\}$$

で定める.

- (1) I は $\mathbb{Q}[x, y]$ のイデアルである事を示せ.
- (2) I は $\mathbb{Q}[x, y]$ の極大イデアルである事を示せ.
- (3) I は単項イデアルではない事を示せ.

(H25 筑波大数理物質科学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) (2) $e : \mathbb{Q}[x, y] \rightarrow \mathbb{Q}$, $e(f) := f(0, 0)$ ($x = y = 0$ を代入) とする. このとき $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ に対し $e(f + g) = (f + g)(0, 0) = f(0, 0) + g(0, 0) = e(f) + e(g)$, $e(fg) = (fg)(0, 0) = f(0, 0)g(0, 0) = e(f)e(g)$ 及び $e(1) = 1$ より e は単位的可換環としての準同型射であり, $a \in \mathbb{Q}$ に対し $e(a) = a$ より e は全射でもある.

一般に可換環の準同型射 $f : R \rightarrow S$ があるとき, $r_1, r_2 \in \text{Ker } f$ に対し $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) = 0 + 0 = 0$ より $r_1 + r_2 \in \text{Ker } f$. また $r_1 \in R$, $r_2 \in \text{Ker } f$ に対し $f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2) = f(r_1)0 = 0$ より $r_1 r_2 \in \text{Ker } f$ だから, 核 $\text{Ker } f = \{r \in R : f(r) = 0\}$ は R のイデアルである. I は e の核だから I は $\mathbb{Q}[x, y]$ のイデアル. 準同型定理と e の全射性より $\mathbb{Q}[x, y]/I \simeq \mathbb{Q}$. 特に $\mathbb{Q}[x, y]/I$ は体となるから I は極大イデアルである.

(3) $f = f_{00} + f_{10}x + f_{01}y + f_{20}x^2 + f_{11}xy + f_{02}y^2 + \dots \in \mathbb{Q}[x, y]$ に対し

$$f \in I \Leftrightarrow f_{00} = f(0, 0) = 0 \Leftrightarrow f \in (x, y)$$

(x, y) は 2 元 x, y で生成される $\mathbb{Q}[x, y]$ のイデアル) となる. (x, y) は単項イデアルではなく, 従って I は単項イデアルではない. \square