【問題】　以下の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{A}_4$ を集合 $\{1,2,3,4\}$ の交代群，$\mathbb{V}_4=\{id,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}$ を部分群とする．このとき $\mathbb{V}_4$ は $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群であることを示せ．

(2) 群 G の部分群 H は G における指数が 2 ならば，G の正規部分群であることを示せ．

(3) $\mathbb{V}_4$ の正規部分群 K で $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群にはならないような K の例を与えよ．

(H20 東京都立大理学研究科 数学)

【解答】　(1) 互いに共通の文字を含まない 2 つの互換の積で表される置換の全体は 1 つの共役類となり，その個数は ${}_4C_2\times{}_2C_2\div 2=3$ だから，$\mathbb{V}_4$ に含まれる 3 種の置換はその共役類となる．$\mathbb{V}_4$ はこの共役類に単位元を加えたものだから，$\mathbb{V}_4$ は正規部分群である．

(2) G の H による左剰余類集合を $G/H=\{eH,gH\}$ $(g\in G-H,\ e$ は単位元$)$ とする．仮に $N_G(H)=H$ だとすると $x\in G-H$ に対し $xHx^{-1}=gH$ が成立．特に $x=g$ とすれば $gHg^{-1}=gH$ だから $ghg^{-1}=g$ となる $h\in H$ が存在するが，$g=h\in H$ となり矛盾を生ずる．よって $N_G(H)=G$，従って H は正規部分群となる．

(3) $K=\{e,(1,2)(3,4)\}$ は $\mathbb{V}_4$ の部分群であり，$\mathbb{V}_4$ は可換群だから，K は $\mathbb{V}_4$ の正規部分群でもある．一方，$(1,2)(3,4)$ の $\mathfrak{A}_4$ の元 $(1,2)(2,3)$ による共役は $(1,2)(2,3)\cdot(1,2)(3,4)\cdot(2,3)(1,2)=(2,3)(1,4)$ だから，K は $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群ではない．　□

【問題】

(1) 素数 p に対し位数 p の群を決定せよ.

(2) 位数 4 の群を決定せよ.

(3) 位数 35 の群を決定せよ.

(H19 首都大学東京理工学研究科 数学)

【解答】 一般に群 G の元 $g \in G$ の生成する部分群を $\langle g \rangle$ とする.

(1) Lagrange の定理より任意の元の位数は群の位数の約数であり, 単位元以外の元の位数は p, 従って群全体を生成する. 故に位数 p の群は巡回群である.

(2) G を位数 4 の群だとする. 位数 4 の元が存在すれば $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. 一方, 位数 4 の元が存在しない場合, 単位元 e 以外の元の位数は 2 となる. 今, $g \in G - \{e\}$, $h \in G - \langle g \rangle$ とすれば $gh \neq g, h$ であり, $gh = e$ だとすると $h = g^{-1} = g$ となり矛盾するから $G = \{e, g, h, gh\}$ となる. 同様に考えれば $hg \neq g, h, e$ だから $hg = gh$, 従って G は可換である. 更に $G = \langle g \rangle \langle h \rangle$ となるから, G は直積 $\langle g \rangle \times \langle h \rangle$ となる. $\langle g \rangle, \langle h \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ より $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる. よって

$$G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{または} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(3) G を位数 35 の群だとする. Sylow の定理より位数 7 の元が存在する. その一つを h とし, $H = \langle h \rangle$ と置く. H と共役な G の部分群の個数は $7m + 1$ という形の 35 の約数だから, その個数は 1, 従って H は G の正規部分群である. 再び Sylow の定理を用いれば位数 5 の元が存在する. その一つを k とし, $K = \langle k \rangle$ と置く. K と共役な G の部分群の個数は $5m + 1$ という形の 35 の約数だから, その個数は 1, 従って K も G の正規部分群である. これらより HK は G の部分群となる. H, K の単位元以外の元の位数はそれぞれ $7, 5$ だから $H \cap K = \{e\}$ であり,

$$hkh^{-1}k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1}) \text{ より } hkh^{-1}k^{-1} \in H, \qquad hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} \text{ より } hkh^{-1}k^{-1} \in K$$

だから $hkh^{-1}k^{-1} \in K \cap H = \{e\}$. 従って H と K は可換となるから HK は $H \times K$ と同型. 特に $H \times K$ の位数は 35 だから $G = HK$ となる.

以上より $G \simeq H \times K \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ となるから G は巡回群である. $\square$

【問題】 X は有限集合, G は有限群で X に左から作用しているものとする. $\mathcal{P}(X)$ で X のべき集合を表す.

(1) $\mathcal{P}(X)$ には自然な G の作用が定義される事を示せ.

(2) $X = G = \{\zeta_6^k \mid 1 \leq k \leq 6,\ \zeta_6 = \exp(2\pi\sqrt{-1}/6)\}$ (すなわち, G は 1 の 6 乗根全体からなる位数 6 の巡回群) とし, G の X への作用を複素数の積で定義する. このとき $\mathcal{P}(X)$ の G 軌道の個数を求めよ.

(H18 東京都立大理学研究科 数学)

【解答】 (1) $\pi : G \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を $\pi(g, S) = gS\ (= \{gx \in X : x \in S\})$ により定義する. $g, h \in G$, $S \in \mathcal{P}(X)$ に対し $\pi(g, \pi(h, S)) = g(hS) = (gh)S = \pi(gh, S)$ が成立. G の単位元 e に対し $\pi(e, S) = eS = S$ となる. 従って π は $\mathcal{P}(X)$ 上の G の作用となる.

(2) $m = 0, 1, \cdots, 6$ に対し $\mathcal{P}_m(X) = \{S \in \mathcal{P}(X) : \sharp S = m\}$ とすれば $\zeta_6^k \in G$ に対し $\zeta_6^k(\mathcal{P}_m(X)) \subset \mathcal{P}_m(X)$ となる.

$m = 0, 6$ のとき : $\mathcal{P}_0(X), \mathcal{P}_6(X)$ はそれぞれ単一軌道である事は自明.

$m = 1, 5$ のとき : $\mathcal{P}_1(X)$ の元は $S_i = \{\zeta_6^i\} \in \mathcal{P}_1(X)\ \ (1 \leq i \leq 6)$ と表される. $\zeta_6^{i-1} S_1 = S_i\ \ (1 \leq i \leq 6)$ より $\mathcal{P}_1(X)$ は単一軌道である. $\mathcal{P}_5(X)$ の元は X より S_i を除いたものであり, これに着目すれば $m = 5$ の場合も単一軌道である事が分かる.

$m = 2, 4$ のとき : $\mathcal{P}_2(X)$ の元を $S_{ij} = \{\zeta_6^i, \zeta_6^j\} \in \mathcal{P}_2\ \ (i \neq j)$ と表す ($\zeta_6^j = \zeta_6^{j-6}$ より $S_{ij} = S_{i-6,j} = S_{i,j-6}$ と考える). このとき次の 3 種の場合が考えられる.

(i) i, j が連続しているような部分集合の全体は $\{S_{ii+1}\}_{i=1,\cdots,6}$ であり, $\zeta_6^{i-1} S_{12} = S_{ii+1}$ だから $\{S_{ii+1}\}_{i=1,\cdots,6}$ は 1 つの軌道となる.

(ii) i, j の差が 2 となるような部分集合の全体は $\{S_{ii+2}\}_{i=1,\cdots,6}$ であり, $\zeta_6^{i-1} S_{13} = S_{ii+2}$ だから $\{S_{ii+2}\}_{i=1,\cdots,6}$ は 1 つの軌道となる.

(iii) i, j の差が 3 となるような部分集合の全体は $\{S_{ii+3}\}_{i=1,\cdots,3}$ であり, $\zeta_6^{i-1} S_{14} = S_{ii+3}$ だから $\{S_{ii+3}\}_{i=1,\cdots,3}$ は 1 つの軌道となる.

従って $\mathcal{P}_2(X)$ 内の G 軌道は 3 個ある. $\mathcal{P}_4(X)$ の元は X より S_{ij} を除いたものであり, これに着目すれば $\mathcal{P}_2(X)$ 内の軌道の状況と同様なので, $\mathcal{P}_4(X)$ 内の G 軌道は 3 個ある.

$m = 3$ のとき : $\mathcal{P}_3(X)$ の元を $S_{ijk} = \{\zeta_6^i, \zeta_6^j, \zeta_6^k\} \in \mathcal{P}_2\ \ (\sharp\{i, j, k\} = 3)$ と表す.

(i) i, j, k が連続しているような部分集合の全体は $\{S_{ii+1i+2}\}_{i=1,\cdots,6}$ であり, $\zeta_6^{i-1} S_{123} = S_{ii+1i+2}$ だから $\{S_{ii+1i+2}\}_{i=1,\cdots,6}$ は 1 つの軌道となる.

(ii) $(i, j, k) = (i, i+1, i+3)$ という形の部分集合の全体は $\{S_{ii+1i+3}\}_{i=1,\cdots,6}$ であり, $\zeta_6^{i-1} S_{124} = S_{ii+1i+3}$ だから $\{S_{ii+1i+3}\}_{i=1,\cdots,6}$ は 1 つの軌道となる.

(iii) $(i, j, k) = (i, i+1, i+4)$ という形の部分集合の全体は $\{S_{ii+1i+4}\}_{i=1,\cdots,6}$ であり, $\zeta_6^{i-1} S_{125} = S_{ii+1i+4}$ だから $\{S_{ii+1i+4}\}_{i=1,\cdots,6}$ は 1 つの軌道となる.

(iv) $(i, j, k) = (i, i+2, i+4)$ という形の部分集合の全体は $\{S_{135}, S_{246}\}$ であり, $\zeta_6 S_{135} = S_{246}$, $\zeta_6 S_{246} = S_{135}$ だから $\{S_{135}, S_{246}\}$ は 1 つの軌道となる.

従って $\mathcal{P}_3(X)$ 内の G 軌道は 4 個ある.

以上より $\mathcal{P}(X)$ 内の G 軌道の個数は 14 個である. □

【問題】　次の行列

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

に対し $\Lambda={}^tA\Lambda A$ を満たす 4 次実正方行列 A 全体の集合を L とおくとき，次の各問いに答えよ．ただし ${}^tA$ は A の転置行列である．

(1)　L は行列の積に関して群をなすことを示せ．

(2)　$A\in L$ ならば ${}^tA\in L$ であることを示せ．

(3)　$(1,1)$ 成分 a_{11} が $a_{11}\geq 1$ を満たす L の元全体の集合を M とおく．M は L の正規部分群であることを示せ．

(H17 東京都立大理学研究科 数学)

【解答】　(1)　$A,B\in L$ に対し

$${}^t(AB)\Lambda(AB)={}^tB({}^tA\Lambda A)B={}^tB\Lambda B=\Lambda$$

より $AB\in L$．また $A\in L$ のとき

$$(-1)^3=\det\Lambda=\det({}^tA\Lambda A)=\det({}^tA)\det\Lambda\det A=(-1)^3\cdot(\det A)^2$$

より $\det A\neq 0$，従って A は正則であり，さらに

$${}^t(A^{-1})\Lambda A^{-1}={}^t(A^{-1})({}^tA\Lambda A)A^{-1}={}^t(AA^{-1})\Lambda AA^{-1}=\Lambda$$

より $A^{-1}\in L$ となる．従って L は $GL_4(\mathbb{R})$ の部分群，特に群となる．

(2)　$A\in L$ に対し $A^{-1}\in L$ より ${}^t(A^{-1})\Lambda A^{-1}=\Lambda$ であり，$\Lambda^2=\lambda$ より $\Lambda^{-1}=\Lambda$ となるから

$$\begin{aligned}\Lambda=\Lambda^{-1}&=({}^t(A^{-1})\Lambda A^{-1})^{-1}=(A^{-1})^{-1}\cdot\Lambda^{-1}\cdot({}^t(A^{-1}))^{-1}\\&=A\cdot\Lambda\cdot{}^tA={}^t({}^tA)\Lambda{}^tA\qquad(\because\ {}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1})\end{aligned}$$

従って ${}^tA\in L$ となる．

(3)　$\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\cdots,x_4]\in\mathbb{R}^4$ とし，

$$X=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\ :\ x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2=1\right\},\qquad X_\pm=\{\boldsymbol{x}\in X\ :\ \pm x_1>0\}$$

とする．$x_1^2=1+x_2^2+x_3^2+x_4^2\geq 1$ より $\boldsymbol{x}\in X_\pm\ \Leftrightarrow\ \pm x_1\geq 1$ である．また $X_\pm$ の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対し

$$\varphi:[0,1]\to X,\qquad \varphi(t):=\begin{bmatrix}\pm\sqrt{1+(tx_2)^2+(tx_3)^2+(tx_4)^2}\\tx_2\\tx_3\\tx_4\end{bmatrix}$$

とすれば φ は $\varphi(0)=\pm\boldsymbol{e}_1$ と $\varphi(1)=\boldsymbol{x}$ を結ぶ $X_\pm$ 内の連続曲線となるから各 $X_\pm$ は弧状連結である．一方，$\gamma(0)=\boldsymbol{x}_+\in X_+$，$\gamma(1)=\boldsymbol{x}_-\in X_-$ となる連続曲線 $\gamma:I\to X$ が存在したとすると，γ の第 1 成分 $\gamma_1(t)$ に対し $\gamma_1(0)\geq 1$，$\gamma_1(1)\leq 1$，そして中間値の定理より $\gamma_1(s)=0$ となる $0<s<1$ が存在するが，X の定義より $X\cap[x_1=0]=\varnothing$ だからこれは矛盾．故に X_+ の点と X_- の点を結ぶ X 内の連続曲線は存在せず，従って各 $X_\pm$ は X の弧状連結成分となる．特に同相写像 $\varphi:X\to X$ について次の 2 条件は同値となる：

$$\varphi(X_+)=X_+\qquad\Leftrightarrow\qquad\text{“}\varphi(x)\in X_+\text{ となる }x\in X_+\text{ が存在する.”}$$

$A\in L$ とする．$x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2={}^t\boldsymbol{x}\Lambda\boldsymbol{x}$ より ${}^t(A\boldsymbol{x})\Lambda A\boldsymbol{x}=\ {}^t\boldsymbol{x}({}^tA\Lambda A)\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{x}\Lambda\boldsymbol{x}$ だから，$\boldsymbol{x}\in X$ ならば $A\boldsymbol{x}\in X$ となる．A を X に制限して得られる連続写像 φ_A とすれば $\varphi_A(\boldsymbol{e}_1)={}^t[a_{11},a_{21},a_{31},a_{41}]$ $(A=[a_{ij}])$ と上に述べた事より

$$A\in M\ (\Leftrightarrow a_{11}\geq 1)\quad\Leftrightarrow\quad\varphi_A(\boldsymbol{e}_1)\in X_+\quad\Leftrightarrow\quad\varphi_A(X_+)=X_+$$

となる．これより任意の $A\in M$, $B\in L$ に対し $\varphi_B(X_+)=X_+$ のとき

$$\varphi_{B^{-1}AB}(X_+)=B^{-1}(A(B(X_+)))=\varphi_B^{-1}(\varphi_A(\varphi_B(X_+)))=X_+$$

であり，一方，$\varphi_B(X_+)=X_-$ のとき

$$\varphi_{B^{-1}AB}(X_+)=\varphi_B^{-1}(\varphi_A(\varphi_B(X_+)))=\varphi_B^{-1}(\varphi_A(X_-))=\varphi_B^{-1}(X_-)=X_+$$

だから，いずれの場合も $\varphi_{B^{-1}AB}(X_+)=X_+$，従って $B^{-1}AB\in M$ となり，これより M は L の正規部分群となる事が示された．

$\square$

【問題】　有限群 G がその部分群 A, B の直積であるとする．そのとき，次の (a) (b) は同値であることを証明せよ．

(a)　A の位数 m と B の位数 n とは互いに素である．

(b)　G の任意の部分群 H は $H \cap A, H \cap B$ の直積である．

(年度不明　東京都立大理学研究科 数学)

【解答】　(a) $\Rightarrow$ (b)：任意の $h \in H$ は $h = ab$ $(a \in A,\, b \in B)$ と一意的に表される．$a^m = e$ より $h^m = (ab)^m = a^m b^m = b^m$ であり，$(m, n) = 1$ より $xm + yn = 1$ となる $x, y \in \mathbb{Z}$ をとるとき，

$$b = b^{xm+yn} = (b^m)^x (b^n)^y = (h^m)^x \in H.$$

また $a = hb^{-1} \in H$ だから，$H = (H \cap A) \cdot (H \cap B)$ となる．$(H \cap A) \cap (H \cap B) \subset A \cap B = \{e\}$ 及び $H \cap A \lhd H$, $H \cap B \lhd H$ より $H \simeq (H \cap A) \times (H \cap B)$ である．

(b) $\Rightarrow$ (a)：$p \mid (m, n)$ となる素数 $p > 1$ があるとする．A の位数 p の元 a，B の位数 p の元 b をとり，$c = ab = ba$ が生成する巡回群を H とする．c は位数 p の元だから H の位数も p となる．H の元 $a^i b^i$ $(0 < i < p)$ について $a^i b^i \in A$ だとすると $b^i \in a^{p-i} A \subset A$．$b^i$ の位数は再び p となるから $(b^i)^j = b$ となる j が存在し，$b = (b^i)^j \in A$ が成立．これは $A \cap B = \{e\}$ に反する．故に $H \cap A = \{e\}$．同様に $H \cap B = \{e\}$．よって H は $H \cap A$ と $H \cap B$ の直積には成らない．　□