【問題】 R を単位元 1_R $(\neq 0)$ を持つ環，k を R の部分環とする．ただし k は R と同じ単位元を持つものとする $(1_k = 1_R)$．k が体であるとき，次の問いに答えよ．

(1) k から R への作用を R の乗法によって次のように与える：

$$k \times R \ \to \ R, \qquad (a, r) \mapsto ar.$$

このとき R は k 上のベクトル空間となることを確かめよ．

(2) R は k 上のベクトル空間として有限次元とする．このとき任意の $r \in R$ に対して $f(r) = 0$ となる k 上の多項式 $f(x) \in k[x] - \{0\}$ が存在する事を示せ．

(3) R は整域で，k 上のベクトル空間として有限次元とする．k が代数的閉体であれば $R = k$ となる事を示せ．

(4) R が整域でないとき，(3) が成り立たなくなる例を与えよ．

(H20 静岡大学理学研究科 数学専攻)

【解答】(1) $a, b \in k$，$r, s \in R$ とする．このとき R に於ける分配則より $a(r+s) = ar + as$ が成立．従って $a\cdot$ は加法群 R 上の自己準同型である．また $(a+b)r = ar + br$，$(ab)r = a(br)$，$1r = r$ より $k \ni a \mapsto a \cdot \mathrm{End}(R)$ は単位的環準同型となる．従って R は k 上のベクトル空間である．

(2) $\dim_k R = n$ とすると $n+1$ 個以上の元は k 上一次従属となるから，任意の $r \in R$ に対し $c_0 + c_1 r + \cdots + c_n r^n = 0$ について少なくとも 1 つの係数 c_i は 0 では無いような $c_0, \cdots, c_n$ が存在する．$c_1 = \cdots = c_n = 0$ だとすると $c_0 = 0$ となり矛盾から，1 以上の i で $c_i \neq 0$ となるものが存在する．ここで $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \in k[x] - \{0\}$ とすれば $f(r) = 0$ となる．

(3) (2) より $r \in R$ に対し $f(r) = 0$ となる k 係数の (monic な) 多項式 $f(x)$ $(\neq 0)$ が存在する．k は代数的閉体だから，$f(x)$ は一次式の積 $(x - a_1) \cdots (x - a_m)$ $(a_i \in k)$ に分解され $(r - a_1) \cdots (r - a_m) = 0$ が成立．R は整域だから，或る i に対し $r - a_i = 0$，従って $r = a_i \in k$ となる．

(4) $R = \mathbb{C}^2$ (複素数体の直積環) とする．$(a, a) \in R$ $(a \in \mathbb{C})$ により $\mathbb{C}$ を R の部分体と見做す．$\{(1,0), (0,1)\}$ が $\mathbb{C}$ 上の基底となるから R は $\mathbb{C}$ 上 2 次元 (従って有限次元)．$(1,0) \cdot (0,1) = (1 \cdot 0, 0 \cdot 1) = (0,0)$ より R は整域ではない．$\dim_{\mathbb{C}} R = 2$，$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ より $\mathbb{C} \subsetneq R$ となる． $\square$

【問題】 変数 x, y, q が $yx = qxy$, $qx = xq$, $qy = yq$ をみたすとき，つぎを示せ．

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-k}$$

ここで

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q^{m-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \quad (k>0), \qquad \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

である．(注意：$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$ は q の多項式である.)

(H10 静岡大学理工学研究科 数学専攻)

【解答】 m に関する帰納法により証明する．任意の正整数 m について

$$\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)} = 1,$$

特に $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$ だから (右辺)$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = x + y$ となり等号が成立． 次に $m > 1$ とし，$m-1$ までの成立を仮定すると

$$\begin{aligned}(x+y)^m = (x+y)(x+y)^{m-1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} y^{m-1-k} + \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} y x^k y^{m-1-k}\end{aligned}$$

となる．最右辺の第 1 項は

$$(\text{第 1 項}) \ = \ \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} y^{m-(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k y^{m-k} \qquad (k+1 \text{ を改めて } k \text{ とした}).$$

となる．第 2 項について $yx = qxy$ より $yx^k y^{m-1-k} = q^k x^k y^{m-k}$ となる事に注意すれば

$$\begin{aligned}(x+y)^m \ &= \ \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k y^{m-k} + \sum_{k=0}^{m-1} q^k \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-k} \\ &= \begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} x^m + \sum_{k=1}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k y^{m-k} + \sum_{k=1}^{m-1} q^k \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-k} + \begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix} y^m \\ &= \begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} x^m + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k y^{m-k} + \begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix} y^m.\end{aligned}$$

となる．上の式の第 1 項と最終項の係数は $\begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} m-1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}$ であり，更に $1 \leq k \leq m-1$ のとき，$x^k y^{m-k}$ の係数は

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} \\
&= \frac{(q^{m-1}-1)\cdots(q^{(m-1)-(k-1)+1}-1)}{(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} + q^k \frac{(q^{m-1}-1)\cdots(q^{(m-1)-(k-1)+1}-1)(q^{(m-1)-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \\
&= \frac{(q^{m-1}-1)\cdots(q^{(m-1)-(k-1)+1}-1)}{(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \left\{ 1 + q^k \frac{q^{(m-1)-k+1}-1}{q^k-1} \right\} \\
&= \frac{(q^{m-1}-1)\cdots(q^{(m-1)-(k-1)+1}-1)}{(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)} \cdot \frac{q^m-1}{q^k-1},
\end{aligned}
$$

従って $\begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$ となるから

$$
(x+y)^m \;=\; \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix} x^m + \sum_{k=1}^{m-1} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-k} + \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} y^m \;=\; \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} x^k y^{m-k}
$$

以上より m のときにも成立し，従って任意の m について等式が成立する． □