【問題】 0 以上の整数 $\alpha, \beta, \gamma$ に対し $x_1, x_2, x_3$ の多項式 $\xi(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ を次のように行列式を用いて定める.,

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} x_1^\alpha & x_1^\beta & x_1^\gamma \\ x_2^\alpha & x_2^\beta & x_2^\gamma \\ x_3^\alpha & x_3^\beta & x_3^\gamma \end{vmatrix}$$

また

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\xi(\alpha+2, \beta+1, \gamma)}{\xi(2,1,0)}$$

とおく.

(1) $\xi(2,1,0)$ を求めよ.

(2) $S_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3)$ および $S_{2,1,0}(x_1, x_2, x_3)$ を多項式の形で求めよ.

(3) $k$ を 0 以上の整数とするとき, 次の等式を示せ.

$$\begin{aligned}&(x_1^k + x_2^k + x_3^k) S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1, x_2, x_3) \\ &\qquad = S_{\alpha+k,\beta,\gamma}(x_1, x_2, x_3) + S_{\alpha,\beta+k,\gamma}(x_1, x_2, x_3) + S_{\alpha,\beta,\gamma+k}(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

(4) 次の等式を示せ.

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = S_{4,0,0}(x_1, x_2, x_3) - S_{3,1,0}(x_1, x_2, x_3) + S_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$$

(H20 大阪大学基礎工学研究科 数理科学専攻)

【解答】 (1)

$$\begin{aligned}\xi(2,1,0) &= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 & x_1^0 \\ x_2^2 & x_2^1 & x_2^0 \\ x_3^2 & x_3^1 & x_3^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 & 0 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 + x_1 & 1 \\ x_3 + x_1 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} x_2 + x_1 & 1 \\ x_3 - x_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\end{aligned}$$

よって $\xi(2,1,0) = \underline{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}$ となる.

(2) $\xi(0+2, 0+1, 0) = \xi(2,1,0)$ より $S_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\xi(0+2, 0+1, 0)}{\xi(2,1,0)} = \underline{1}$

次に (1) の結果を用いると

$$\xi(2+2, 1+1, 0) = \begin{vmatrix} x_1^{2+2} & x_1^{1+1} & x_1^0 \\ x_2^{2+2} & x_2^{1+1} & x_2^0 \\ x_2^{2+2} & x_3^{1+1} & x_3^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_1^2)^2 & (x_1^2)^1 & (x_1^2)^0 \\ (x_2^2)^2 & (x_2^2)^1 & (x_2^2)^0 \\ (x_3^2)^2 & (x_3^2)^1 & (x_3^2)^0 \end{vmatrix} = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)$$

となるから,

$$\begin{aligned}&S_{2,1,0}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\xi(2+2, 1+1, 0)}{\xi(2,1,0)} = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)(x_2^2 - x_3^2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \\ &= \underline{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)}\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&(x_1^k+x_2^k+x_3^k)\xi(\alpha+2,\beta+1,\gamma)\\
=&x_1^k\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+x_2^k\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+x_3^k\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+k+2} & x_1^{\beta+k+1} & x_1^{\gamma+k}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+k+2} & x_2^{\beta+k+1} & x_2^{\gamma+k}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+k+2} & x_3^{\beta+k+1} & x_3^{\gamma+k}\end{vmatrix} \qquad \left(\text{$x_i^k$ を第 i 行の成分に分配する}\right)\\
=&x_1^{\alpha+k+2}\begin{vmatrix} x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}-x_1^{\beta+k+1}\begin{vmatrix} x_2^{\alpha+2} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+x_1^{\gamma+k}\begin{vmatrix} x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1}\end{vmatrix} \qquad \left(\text{第 1 項の第 1 行に関する余因子展開}\right)\\
&-x_2^{\alpha+k+2}\begin{vmatrix} x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+x_2^{\beta+k+1}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}-x_2^{\gamma+k}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1}\end{vmatrix} \qquad \left(\text{第 2 項の第 2 行に関する余因子展開}\right)\\
&+x_3^{\alpha+k+2}\begin{vmatrix} x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\end{vmatrix}-x_3^{\beta+k+1}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\gamma}\end{vmatrix}+x_3^{\gamma+k}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1}\end{vmatrix} \qquad \left(\text{第 3 項の第 3 行に関する余因子展開}\right)\\
=&x_1^{\alpha+k+2}\begin{vmatrix} x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}-x_2^{\alpha+k+2}\begin{vmatrix} x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+x_3^{\alpha+k+2}\begin{vmatrix} x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\end{vmatrix}\\
&-x_1^{\beta+k+1}\begin{vmatrix} x_2^{\alpha+2} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+x_2^{\beta+k+1}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}-x_3^{\beta+k+1}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\gamma}\end{vmatrix}\\
&+x_1^{\gamma+k}\begin{vmatrix} x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1}\end{vmatrix}-x_2^{\gamma+k}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1}\end{vmatrix}+x_3^{\gamma+k}\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1}\end{vmatrix}\\
=&\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+k+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+k+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+k+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+k+1} & x_1^{\gamma}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+k+1} & x_2^{\gamma}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+k+1} & x_3^{\gamma}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1^{\alpha+2} & x_1^{\beta+1} & x_1^{\gamma+k}\\ x_2^{\alpha+2} & x_2^{\beta+1} & x_2^{\gamma+k}\\ x_3^{\alpha+2} & x_3^{\beta+1} & x_3^{\gamma+k}\end{vmatrix}\\
=&\xi(\alpha+k+2,\beta+1,\gamma)+\xi(\alpha+2,\beta+k+1,\gamma)+\xi(\alpha+2,\beta+1,\gamma+k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad &(x_1^k+x_2^k+x_3^k)\xi(\alpha+2,\beta+1,\gamma)\\
&\qquad=\xi(\alpha+k+2,\beta+1,\gamma)+\xi(\alpha+2,\beta+k+1,\gamma)+\xi(\alpha+2,\beta+1,\gamma+k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad &(x_1^k+x_2^k+x_3^k)S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)\\
&\qquad=S_{\alpha+k,\beta,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+S_{\alpha,\beta+k,\gamma}(x_1,x_2,x_3)+S_{\alpha,\beta,\gamma+k}(x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}
$$

(4) $S_{0,0,0}(x_1,x_2,x_3)=1$ と (3) の結果より

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4=S_{4,0,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)$$

行列式の交代性より

$$
\begin{aligned}
\xi(0+2,4+1,0+0)&=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^5 & x_1^0\\ x_2^2 & x_2^5 & x_2^0\\ x_3^2 & x_3^5 & x_3^0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1^5 & x_1^2 & x_1^0\\ x_2^5 & x_2^2 & x_2^0\\ x_3^5 & x_3^2 & x_3^0\end{vmatrix}=-\xi(3+2,1+1,0+0)\\
\xi(0+2,0+1,0+4)&=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 & x_1^4\\ x_2^2 & x_2^1 & x_2^4\\ x_3^2 & x_3^1 & x_3^4\end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & x_1^1\\ x_2^4 & x_2^2 & x_2^1\\ x_3^4 & x_3^2 & x_3^1\end{vmatrix}=\xi(2+2,1+1,1+0)
\end{aligned}
$$

従って

$$S_{0,4,0}(x_1,x_2,x_3)=\frac{\xi(0+2,4+1,0+0)}{\xi(2,1,0)}=-\frac{\xi(3+2,1+1,0+0)}{\xi(2,1,0)}=-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3).$$

同様に $S_{0,0,4}(x_1,x_2,x_3)=S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$ となる事が分かる.

$$\therefore\qquad x_1^4+x_2^4+x_3^4=S_{4,0,0}(x_1,x_2,x_3)-S_{3,1,0}(x_1,x_2,x_3)+S_{2,1,1}(x_1,x_2,x_3)$$

$\square$

**《考察》** 具体的な対称多項式 (ベキ和) の Schur 関数による展開の問題．以下，Schur 関数の一般論を少々：

$\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対する $\mathbb{Z}[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_1^{-1}, \cdots, \varepsilon_n^{-1}]$ の元

$$\xi(\ell) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{\ell_1} & \varepsilon_1^{\ell_2} & \cdots & \varepsilon_1^{\ell_n} \\ \varepsilon_2^{\ell_1} & \varepsilon_2^{\ell_2} & \cdots & \varepsilon_2^{\ell_n} \\ & & \cdots & \\ \varepsilon_n^{\ell_1} & \varepsilon_n^{\ell_2} & \cdots & \varepsilon_n^{\ell_n} \end{vmatrix}$$

を $\ell \in \mathbb{Z}^n$ に対応する $\xi$ **関数** という．例えば $\rho = (n-1, n-2, \cdots, 2, 1, 0) \in \mathbb{Z}^n$ に対応する $\xi$ 関数 $\xi(\rho)$ は Vandermonde の行列式となる．次に $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$S_\lambda = \frac{\xi(\lambda + \rho)}{\xi(\rho)} \quad \in \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \varepsilon_1^{-1}, \cdots, \varepsilon_n^{-1}]$$

を $\lambda$ に対応する **Schur 関数** という．$\mathbb{Z}^n$ の部分集合 $M_n$ を $M_n = \{\lambda \in \mathbb{Z}^n : \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$ により定義する．

**定理** Schur 関数に関し次が成立する：

(i) 各 $S_\lambda$ は $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ に関する対称関数．特に $\lambda \in M_n$ ならば $S_\lambda \in \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n]$.

(ii) $\{S_\lambda\}_{\lambda \in M_n}$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立.

(iii) 任意の $\mathbb{C}$ 係数の $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ の対称多項式は $\{S_\lambda\}_{\lambda \in M_n}$ の $\mathbb{C}$ 上の 1 次結合で表される．特に対称多項式が $\mathbb{Z}$ 係数ならば，$\{S_\lambda\}_{\lambda \in M_n}$ の $\mathbb{Z}$ 上の 1 次結合で表される.

特に (iii)．$\mathbb{C}$ 上ではなく，$\mathbb{Z}$ 上の 1 次結合となるというのが重要である．本問は 3 変数の 4 次のベキ和 $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ を Schur 関数で展開せよ，という問題. □