【問題】 $\mathbb{C}$ 上の 2 次正方行列全体のなす環を $M_2(\mathbb{C})$ とする．$M_2(\mathbb{C})$ の部分集合 A を

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

と定める．

(1) A は $M_2(\mathbb{C})$ の部分環であることを示せ．

(2) 環の同型 $A \simeq \mathbb{C}[X]/(X^2)$ を示せ．

(3) 環 A のイデアルをすべて求めよ．

(H25 岡山大学自然科学研究科 数理物理科学専攻)

【解答】 (1) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と置けば，$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bJ$ と表される．

$$aI + bJ - (cI + dJ) = (a-c)I + (b-d)J \in A, \qquad (aI + bJ)(cI + dJ) = acI + (ad + bc)J \in A$$

及び $I \in A$ より A は $M_2(\mathbb{C})$ の可換な単位的部分環である．

(2) $J^2 = O$ に注意して，$\mathbb{C}[X]$ から A への写像 φ を

$$\mathbb{C}[X] \ni f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \ \mapsto \ a_0 I + a_1 J \ (= \sum_{i=0}^{n} a_i J^i) \in M_2(\mathbb{C})$$

により定義する．$g(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$ のとき

$$\varphi(f(X) + g(X)) = \varphi\left(\sum_{i \geq 0} (a_i + b_i) X^i \right) = (a_0 + b_0)I + (a_1 + b_1)J = \varphi(f(X)) + \varphi(g(X))$$

$$\varphi(f(X)g(X)) = \varphi\left(\sum_{i \geq 0} (a_0 b_i + a_1 b_{i-1} \cdots + a_i b_0) X^i \right) = (a_0 b_0)I + (a_0 b_1 + a_1 b_0)J = \varphi(f(X))\varphi(g(X))$$

かつ $\varphi(1) = I$ より φ は $\mathbb{C}[X]$ から A への単位的可換環としての準同型射である．明らかに全射であり，I, J は $\mathbb{C}$ 上一次独立だから，$f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ に対し

$$\varphi(f(X)) = O \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(X) = X^2(a_2 + a_3 X + \cdots) \in (X^2),$$

従って $\operatorname{Ker}\varphi = (X^2)$ となる．従って準同型定理より $A \simeq \mathbb{C}[X]/(X^2)$ となる．

(3) JA は A の真の ideal である．一方，$\mathfrak{a}$ を JA と異なる A の真の ideal とすると $a \neq 0$ となる $aI + bJ \in \mathfrak{a}$ がとれる．このとき $a^{-2}I(aI + bJ)(aI - bJ) = I\mathfrak{a}$ となり $\mathfrak{a} \neq A$ に反する．従って A の真の ideal は JA に限る．よって A の ideal は $\{O\}, JA, A$ の 3 種に限る． $\square$

【問題】 R は体 K 上の 3 次正方行列の成す環とし，

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする．

(i) 環 nRn はどのような形をした行列の全体か．

(ii) 環 nRn はただ 1 つの極大 ideal を持つ事を証明せよ．

(S55 岡山大学理学研究科 数学)

【解答】 (i) $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \in R$ とすると

$$nXn = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{21} & x_{22} \\ 0 & x_{31} & x_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．よって $nRn = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{o} & X \\ 0 & {}^t\boldsymbol{o} \end{bmatrix} : X \in M_2(k) \right\}$ という形になる (ここで $\boldsymbol{o} = {}^t[0, 0]$ とする)．

(ii) (i) の結果より

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は nRn の k 上の基底となり，この基底に関する基本関係は

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_4, \qquad \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = O \quad (\text{左記以外})$$

となる．$\mathfrak{n}$ を nRn の ideal とする．$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4 \in \mathfrak{n}$ に対し

$$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{x} = x_2\boldsymbol{e}_2 + x_4\boldsymbol{e}_4, \qquad (\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 = x_2\boldsymbol{e}_2$$

より $x_2 \neq 0$ だとすると基本関係より $\mathfrak{n} = nRn$ となるから，$\mathfrak{n}$ が真の ideal である為には $\mathfrak{n} \subset k\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2 + k\boldsymbol{e}_3$ でなければいけない．

今，$\mathfrak{m} = k\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2 + k\boldsymbol{e}_3$ とすれば $\mathfrak{m}$ は nRn の両側 ideal であり，上述の考察より極大 ideal となる事が分かる．一方，$\mathfrak{m}'$ を nRn の極大 ideal とすると，再び上の考察より $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$ となり，極大性から $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$ となる．以上より nRn は唯一の極大 ideal $\mathfrak{m}$ を持つ． □