【問題】 以下の問に答えよ．

(1) (a) 実数全体 $\mathbb{R}$ を加法により群と見做し，正の実数全体 $\mathbb{R}_+$ を乗法により群と見做したとき，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_+$ は群として同型である事を示せ．

(b) 有理数全体 $\mathbb{Q}$ を加法により群と見做し，正の有理数全体 $\mathbb{Q}_+$ を乗法により群と見做したとき，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}_+$ は群として同型でない事を示せ．

(2) (a) G, G' を群とし，$f : G \to G'$ を群の準同型写像とする．$\mathrm{Ker}\, f$ の定義を述べ，それが G の正規部分群である事を示せ..

(b) G, G_1, G_2 を群とし，$f_1 : G \to G_1$, $f_2 : G \to G_2$ を群の準同型写像とする． 写像 $f : G \to G_1 \times G_2$ を $f(g) = (f_1(g), f_2(g))$ によって定めると，f は群の準同型写像である事を示せ．

(c) G を群 N_1, N_2 を G の正規部分群とする．$G/N_1, G/N_2$ が共に Abel 群なら，$G/(N_1 \cap N_2)$ も Abel 群である事を示せ．

(H26 年度神戸大理学研究科数学専攻 改題)

【解答】 (1)(a) $\phi(x) = e^x$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_+$ への写像であり，指数法則より $\phi(x+y) = e^x e^y$ だから，ϕ は群の準同型である．ϕ は狭義単調増加かつ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ より ϕ は全単射，従って群の同型写像となる．

(b) 仮に $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}_+$ への単射 ϕ があるとする．$\phi(0) = 1$ より $\phi(1)$ は 1 以外の有理数となる．

$$\phi(1) = \frac{p_1^{i_1} \cdots p_a^{i_a}}{p_{a+1}^{i_{a+1}} \cdots p_{a+b}^{i_{a+b}}} \qquad (p_1, \ldots, p_{a+b} \text{ は相異なる素数，} i_1, \ldots, i_{a+b} > 0)$$

$i_1, \ldots, i_{a+b}$ の最大公約数が m ならば $q^{2m} = \phi(1)$ となる $q \in \mathbb{Q}_+$ は存在しない．

(証明) 仮に q があるとすると，$(q^2)^m = \phi(1)$． $i_k = j_k m$ $(j_k \in \mathbb{Z}_{>0})$ とすれば $q^2 = \frac{p_1^{j_1} \cdots p_a^{j_a}}{p_{a+1}^{j_{a+1}} \cdots p_{a+b}^{j_{a+b}}}$ が成立．

$$q = \frac{q_1^{l_1} \cdots q_s^{l_s}}{q_{s+1}^{l_{s+1}} \cdots q_{s+t}^{l_{s+t}}} \qquad (q_1, \ldots, q_{s+t} \text{ は相異なる素数，} l_1, \ldots, l_{s+t} > 0)$$

と表すとき，

$$q_1^{2l_1} \cdots q_s^{2l_s} \cdot p_{a+1}^{j_{a+1}} \cdots p_{a+b}^{j_{a+b}} = q_{s+1}^{2l_{s+1}} \cdots q_{s+t}^{2l_{s+t}} \cdot p_1^{j_1} \cdots p_a^{j_a}$$

と素因数分解の一意性より $\{p_1, \cdots, p_a\} = \{q_1, \cdots, q_s\}$，$\{p_{a+1}, \cdots, p_{a+b}\} = \{q_{s+1}, \cdots, q_{s+t}\}$，特に $a = s$, $b = t$ となる． 添え字を適当に変更すれば $q_i = p_i$ $(\forall i)$ とする事ができ，$j_i = 2l_i$ $(\forall i)$ となるが，これは m が最大公約数である事に反する．故に $\phi(1) = q^{2m}$ となる $q \in \mathbb{Q}_+$ は存在しない． ■

従って ϕ は $\mathbb{Q}$ に拡張出来ない．

(2)(a) $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in G : f(x) = e'\}$ (e' は G' の単位元)． $x, y \in \mathrm{Ker}\, f$ のとき $f(xy) = f(x)f(y) = e'e' = e'$ より $xy \in \mathrm{Ker}\, f$． また $f(x^{-1}) = f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(e) = e'$ (e は G の単位元) より $x^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f$ となり，以上から $\mathrm{Ker}\, f$ は G の部分群となる．また $x \in \mathrm{Ker}\, f$, $y \in G$ のとき，

$$f(y^{-1}xy) = f(y)^{-1} f(x) f(y) = f(y)^{-1} e' f(y) = e' \qquad \therefore \quad y^{-1}xy \in \mathrm{Ker}\, f$$

だから，$\mathrm{Ker}\, f$ は G の正規部分群である．

(b) $x, y \in G$ のとき

$$f(xy) = (f_1(xy), f_2(xy)) = (f_1(x)f_1(y), f_2(x)f_2(y)) = (f_1(x), f_2(x))(f_1(y), f_2(y)) = f(x)f(y)$$

より f は群の準同型射である．

(c) (G, G) を G の交換子群とするとき，G/N が Abel 群である事と $(G, G) \subset N$ となる事は同値である． 仮定より $(G, G) \subset N_1, N_2$ となるから $(G, G) \subset N_1 \cap N_2$，従って $G/(N_1 \cap N_2)$ も Abel 群となる． □