【問題】　可換環 $\mathbb{C}\left[x, \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}\right]$ の $\mathbb{C}$ 上の自己同型群を決定せよ.

(S55 北海道大理学研究科 数学)

【解答】　$A = \mathbb{C}\left[x, \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}\right]$ と置く. A の商体は $\mathbb{C}(x)$ だから, A の自己同型射は $\mathbb{C}(x)$ 上の自己同型射に一意的に拡張される. 従って群として

$$\mathrm{Aut}A \simeq \{\varphi \in \mathrm{Aut}\ \mathbb{C}(x) \mid \ \varphi(A) \subset A\}$$

となる. 一般に $\mathbb{C}(x)$ の任意の自己同型射は $\varphi(x) = (ax+b)/(cx+d)\ \ (a,b,c,d \in K,\ ad-bc \neq 0)$ と表されるから, $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ である為には

$$(*) \qquad \varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \varphi(1/x) = \frac{cx+d}{ax+b}, \quad \varphi(1/(x-1)) = \frac{cx+d}{(a-c)x+(b-d)}, \quad \varphi(1/(x+1)) = \frac{cx+d}{(a+c)x+(b+d)}$$

が A に属す事が必要十分となる.

I. $c=0$ のとき : $ad \neq 0$ であり, $(*)$ は次のようになる :

$$\varphi(x) = \frac{ax+b}{d}, \quad \varphi(1/x) = \frac{d}{a(x+b/a)}, \quad \varphi(1/(x-1)) = \frac{d}{a(x+(b-d)/a)}, \quad \varphi(1/(x+1)) = \frac{d}{a(x+(b+d)/a)}$$

となる. 第 1 式は常に A に属す. $\varphi(1/x) \in A$ である為には $b=0,\ b/a=1,$ または $b/a=-1$ でなければならない.

i) $b=0$ のとき, 第 3,4 式の分母について $d/a = \pm 1$ であるから $\varphi(x) = \pm x$ となる.

ii) $b/a=1$ のとき, 第 3,4 式 $\varphi(1/(x\pm 1)) = \frac{a}{d(x+(1\pm d/a))}$ について $1+d/a=1$ だとすると $d=0$ となり矛盾. 一方, $1+d/a \leq 0$ だとすると $1-d/a \geq 2$ だから $\varphi(1/(x+1)) \notin A$. 従って $b/a=1$ となる $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ はない.

iii) $b/a=-1$ のとき, 第 3,4 式 $\varphi(1/(x\pm 1)) = \frac{a}{d(x+(-1\mp d/a))}$ について $-1+d/a=-1$ だとすると $d=0$ となり矛盾. 一方, $-1+d/a \geq 0$ だとすると $-1+d/a \leq -2$ だから $\varphi(1/(x+1)) \notin A$. 従って $b/a=-1$ となる $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ はない.

II. $a=0$ のとき : $bc \neq 0$ であり, $(*)$ は次のようになる :

$$\varphi(x) = \frac{b}{c(x+d/c)}, \quad \varphi(1/x) = \frac{cx+d}{b}, \quad \varphi(1/(x-1)) = \frac{cx+d}{-c(x+(d-b)/c)}, \quad \varphi(1/(x+1)) = \frac{cx+d}{c(x+(d+b)/c)}$$

第 2 式は常に A に属す. $\varphi(x) \in A$ である為には $d=0,\ d/c=1,$ または $d/c=-1$ でなければならない.

i) $d=0$ のとき第 3,4 式の分母について $b/c=\pm 1$ であるから $\varphi(x) = \pm x^{-1}$ となる.

ii) $d/c=1$ のとき, 第 3,4 式 $\varphi(1/(x\pm 1)) = \frac{cx+d}{\pm c(x+(1\pm b/c))}$ について $1-b/c=1$ だとすると $b=0$ となり矛盾. 一方, $1-b/c \leq 0$ だとすると $1+b/c \geq 2$ だから $\varphi(1/(x+1)) \notin A$. 従って $d/c=1$ となる $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ はない.

iii) $d/c=-1$ のとき, 第 3,4 式 $\varphi(1/(x\pm 1)) = \frac{cx+d}{\pm c(x+(-1\pm b/c))}$ について $-1-b/c=-1$ だとすると $d=0$ となり矛盾. 一方, $-1-b/c \geq 0$ だとすると $-1+b/c \geq -2$ だから $\varphi(1/(x+1)) \notin A$. 従って $d/c=-1$ となる $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ はない.

III. $ac \neq 0$ のとき : $(*)$ は次のようになる :

$$\varphi(x) = \frac{ax+b}{c(x+d/c)}, \quad \varphi(1/x) = \frac{cx+d}{a(x+b/a)}, \quad \varphi(1/(x-1)) = \frac{cx+d}{(a-c)x+(b-d)}, \quad \varphi(1/(x+1)) = \frac{cx+d}{(a+c)x+(b+d)}$$

第 1,2 式の分母に注意して場合分けする. 先ず, $ad-bc \neq 0$ より $(d,b)=(0,0),\ (c,a),$ また $(-c,-a)$ という場合はない.

i) $(d,b)=(0,\pm a)$ のとき, $\varphi(1/(x-1)) = cx/((a-c)x \pm a),\ \varphi(1/(x+1)) = cx/((a+c)x \pm a)$. $a=c$ ならば $\varphi(1/(x+1)) = x/(2x\pm 1) \notin A,\ a=-c$ ならば $\varphi(1/(x-1)) = -x/(2x\pm 1) \notin A$. $a \neq \pm c$ のとき, $a/(a-c)=1$ だとすると $c=0$ となり矛盾. 一方, $a/(a-c)=-1$ だとすると $c=2a,\ a/(a+c)=1/3$ となり $\varphi(1/(x+1)) \notin A$ となるから何れの場合も $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ ではない.

ii) $(d,b)=(\pm c,0)$ のとき, $\varphi(1/(x-1)) = c(x\pm 1)/((a-c)x \mp c),\ \varphi(1/(x+1)) = c(x\pm 1)/((a+c)x \pm c)$. $a=c$ ならば $\varphi(1/(x+1)) = (x\pm 1)/(2x\pm 1) \notin A,\ a=-c$ ならば $\varphi(1/(x-1)) = -(x\pm 1)/(2x\mp 1) \notin A$. $a \neq \pm c$ のとき, $c/(a-c)=1$ だとすると $a=2c,\ c/(a+c)=1/3$ となり $\varphi(1/(x+1)) \notin A$ であり, 一方, $c/(a-c)=-1$ だとすると $a=0$ となる矛盾. 従って何れの場合も $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$ ではない.

iii) $d=c, b=-a, a=c$ のとき,

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \varphi(1/x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad \varphi(1/(x-1)) = -\frac{x-1}{2}, \quad \varphi(1/(x+1)) = \frac{x+1}{2x}\ \in A$$

より $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$.

iv)　$d=c,\ b=-a,\ a=-c$ のとき,

$$\varphi(x)=-\frac{x-1}{x+1},\quad \varphi(1/x)=-\frac{x+1}{x-1},\quad \varphi(1/(x-1))=-\frac{x+1}{2x},\quad \varphi(1/(x+1))=\frac{x+1}{2}\ \in A$$

より $\varphi\in\mathrm{Aut}(A)$.

v)　$d=-c,\ b=a,\ a=c$ のとき,

$$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1},\quad \varphi(1/x)=\frac{x-1}{x+1},\quad \varphi(1/(x-1))=\frac{x-1}{2},\quad \varphi(1/(x+1))=\frac{x-1}{2x}\ \in A$$

より $\varphi\in\mathrm{Aut}(A)$.

iv)　$d=-c,\ b=a,\ a=-c$ のとき,

$$\varphi(x)=-\frac{x+1}{x-1},\quad \varphi(1/x)=-\frac{x-1}{x+1},\quad \varphi(1/(x-1))=-\frac{x-1}{2x},\quad \varphi(1/(x+1))=-\frac{x-1}{2}\ \in A$$

より $\varphi\in\mathrm{Aut}(A)$.

vii)　$(d,b)=\pm(c,-a)$, $a\pm c\neq 0$ のとき,

$$\varphi(1/(x-1))=\frac{c(x\pm 1)}{(a-c)(x\mp(a+c)/(a-c))},\qquad \varphi(1/(x+1))=\frac{c(x\pm 1)}{(a+c)(x\mp(a-c)/(a+c))}$$

となる. $(a+c)/(a-c)=1$ ならば $c=0$, $(a+c)/(a-c)=-1$ ならば $a=0$ となり矛盾する.

以上の考察より, $\mathrm{Aut}A$ に属する φ による x の像は以下の 8 通りとなる：

$$\varphi_0(x)=x\ (=1(x)),\quad \varphi_1(x)=-x\ (=s_1(x)),\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{x},\quad \varphi_3(x)=-\frac{1}{x},$$
$$\varphi_4(x)=\frac{x-1}{x+1}\ (=s_2(x)),\quad \varphi_5(x)=-\frac{x-1}{x+1},\quad \varphi_6(x)=\frac{x+1}{x-1},\quad \varphi_7(x)=-\frac{x+1}{x-1}.$$

自己同型射は x の行き先により決定される事に注意すれば

$$s_1^2=s_2^2=1,\qquad s_1s_2=\varphi_5,\quad s_2s_1=\varphi_6,\quad s_1s_2s_1=\varphi_7,\quad s_2s_1s_2=\varphi_1,\quad s_1s_2s_1s_2=\varphi_3=s_2s_1s_2s_1$$

となる事が分かる. これは s_1,s_2 を生成系とし,

$$s_1^2=s_2^2=e,\qquad s_1s_2s_1s_2=s_2s_1s_2s_1$$

を基本関係とする群, 即ち, B_2 型の Weyl 群 となる. $\therefore\ \mathrm{Aut}(A)\simeq W_{B_2}$. □

〈雑感〉 面倒なんだけど面白い. 永田先生の本には別の方法が紹介されている.

□