【問題】　体 K 上の正則な n 次正方行列全体の集合を $GL(n,K)$ で表し，行列の積について群であるとみる．さらに

$$SL(n,K)=\{\sigma\in GL(n,K)\mid \det\sigma=1\}$$

とする．

(1)　$SL(n,K)$ は $GL(n,K)$ の正規部分群であることを証明せよ．
(2)　剰余群 $GL(n,K)/SL(n,K)$ は Abel 群であることを証明せよ．
(3)　$K=\mathbb{F}_5=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ のとき，$GL(n,K)$ の部分群で $SL(n,K)$ を含むものは何個あるか．

(H21 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】　(1) (2)　一般の体 K について次の群の系列は完全系列である：

$$e\to SL(n,K)\overset{\iota}{\hookrightarrow} GL(n,K)\xrightarrow{\det} K^\times\to e$$

($\because$　$SL(n,K)\hookrightarrow GL(n,K)$ は自然な埋め込みだから群の単射である．また det は行列式の乗法定理 $\det(gh)=\det(g)\det(h)$ $(g,h\in GL(n,K))$ より群の準同型射であり，$SL(n,K)$ の定義より $\mathrm{Im}\iota=\mathrm{Ker}\det$ となる．さらに任意の $a\in K^\times$ に対し対角行列 $\mathrm{diag}(a,1,\cdots,1)$ の行列式の値が a となる事から全射となる．)

$SL(n,K)$ は群準同型射 det の核だから $GL(n,K)$ の正規部分群である．また準同型定理より $GL(n,K)/SL(n,K)\simeq K^\times$ だから剰余群 $GL(n,K)/SL(n,K)$ は Abel 群である．

(3)　上の完全系列と準同型定理より $GL(n,K)$ の $SL(n,K)$ を含む部分群は $K^\times$ の部分群と 1 対 1 に対応するから，その個数は $K^\times$ の部分群の個数と一致する．

ここで $K=\mathbb{F}_5$ とする．$n\in\mathbb{Z}$ の属する同値類 $n+5\mathbb{Z}$ を $\overline{n}$ と記すとき，

$$(\overline{2})^4=\overline{2^4}=\overline{16}=\overline{1},\qquad (\overline{3})^4=\overline{3^4}=\overline{81}=\overline{1}$$

より $K^\times$ の部分群は $\overline{2}$ または $\overline{3}$ を含めば $K^\times$ と一致する．一方，

$$\overline{4}^2=\overline{16}=\overline{1},\quad \overline{4}^3=\overline{4}^2\cdot\overline{4}=\overline{4},\quad \cdots$$

より $\overline{4}$ により生成される $K^\times$ の部分群は真の部分群となる．これと $\overline{1}$ のみの部分群 (=単位群)，および $K^\times$ を合わせれば $K^\times$ の部分群は 3 個．従って $GL(n,K)$ の $SL(n,K)$ を含む部分群は $\underline{\text{3 個}}$ である．　$\square$

【別解】 (1) (2) は以下のように直接証明出来る：

(1)　$\sigma\in SL(n,K)$，$g\in GL(n,K)$ とする．n 次正方行列 A,B について一般に $\det(AB)=\det A\cdot\det B$ が成り立つ事より

$$\det(g^{-1}\sigma g)=\det(g^{-1})\cdot\det\sigma\cdot\det g=\det(g^{-1})\cdot\det g\cdot\det\sigma=\det(g^{-1}\cdot g)\cdot\det\sigma$$

単位行列 e の行列式の値は 1 だから $\sigma\in SL(n,K)$ である事と併せて $\det(g^{-1}\sigma g)=1$，即ち $g^{-1}\sigma g\in SL(n,K)$ である事が分かる．従って $SL(n,K)$ は $GL(n,K)$ の正規部分群である．

(2)　$g,h\in GL(n,K)$ に対し

$$\det(g^{-1}h^{-1}gh)=\det g^{-1}\cdot\det h^{-1}\cdot\det g\cdot\det h=\det g^{-1}\cdot\det g\cdot\det h^{-1}\cdot\det h=1$$

だから $g^{-1}h^{-1}gh\in SL(n,K)$ となる．$g\in GL(n,K)$ の属する $GL(n,K)/SL(n,K)$ の同値類を $\overline{g}$ とすれば

$$\overline{g}^{-1}\overline{h}^{-1}\overline{g}\overline{h}=\overline{g^{-1}h^{-1}gh}=\overline{e},\qquad \therefore\quad \cdot\overline{g}\overline{h}=\overline{h}\overline{g}$$

従って $GL(n,K)/SL(n,K)$ は Abel 群である．　$\square$

《考察》　「準同型定理」より群の完全系列

$$e\to N\overset{\iota}{\hookrightarrow} G\xrightarrow{\pi} H\to e$$

に対し，$\widetilde{\pi}:(\iota(N)$ を含む G の部分群$)\ni G'\ \mapsto\ \pi(G')\in(H$ の部分群$)$　は全単射となる．

($\because$　一応，証明を与える．

$\iota(N)$ を含む G の部分群 G', G'' に対し $\widetilde{\pi}(G') = \widetilde{\pi}(G'')$ だとする．$g' \in G'$ に対し $\pi(g') \in \pi(G'')$ より $\pi(g') = \pi(g'')$ となる $g'' \in G''$ が存在する．$\pi((g'')^{-1}g') = \pi(g'')^{-1}\pi(g') = e$ より $(g'')^{-1}g' \in \iota(N)$，$g' \in g''\iota(N) \subset G''$，従って $G' \subset G''$．同様に $G'' \subset G'$ だから $G' = G''$，即ち $\widetilde{\pi}$ は単射である．

H' を H の部分群に対し $G' = \pi^{-1}(H')$ とする．$\pi(\iota(N)) = e \in H$ より G' は $\iota(N)$ を含む G の部分群であり，π の全射性より $\pi(G') = H'$ だから，$\widetilde{\pi}(G') = H'$，即ち $\widetilde{\pi}$ は全射である.)

〈雑感〉 全般的に基本的．群論は一般論よりも具体的な計算していた方が楽しい．

【問題】 G を有限群，H は G の部分群とする．このとき次を示せ．

(1) $x \in G$ に対して $x^{-1}Hx$ は G の部分群である ($x^{-1}Hx$ を H の共役部分群という)．

(2) $N_G(H) = \{x \in G \mid x^{-1}Hx = H\}$ は H を正規部分群として含む G の部分群で最大の部分群である．

(3) H の共役部分群の個数は指数 $[G : N_G(H)]$ に等しい．

(4) $G = \displaystyle\bigcup_{x \in G} x^{-1}Hx$ ならば $G = H$ である．

(H16 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】 (1) $g_i = x^{-1}h_i x \in x^{-1}Hx \ \ (h_i \in H,\, i = 1, 2)$ とする．このとき

$$g_1^{-1}g_2 = (x^{-1}h_1x)^{-1}(x^{-1}h_2x) = x^{-1}h_1^{-1}(x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1}h_2x = x^{-1}h_1^{-1}x \cdot x^{-1}h_2x = x^{-1}h_1^{-1}h_2x$$

H は部分群だから $h_1^{-1}h_2 \in H$ となり，従って $g_1^{-1}g_2 \in x^{-1}Hx$．故に $x^{-1}Hx$ は部分群となる．

(2) 定義より $H \lhd N_G(H)$ である事は自明．今 G の部分群 K が H を正規部分群として含むとする．任意の K の元 k をとる．$k^{-1}Hk \subset H$ であるが，任意の $h \in H$ に対し

$$h = (k^{-1}k)h(k^{-1}k) = k^{-1}(khk^{-1})k \ \in k^{-1}(kHk^{-1})k \subset k^{-1}Hk$$

だから $H \subset k^{-1}Hk$，従って $H = k^{-1}Hk$ となる．故に $K \subset N_G(H)$ となり，$N_G(H)$ が H を正規部分群を含む部分群の中で最大となる事が分かる．

(3) $C = \{xHx^{-1} \mid x \in G\}$ (H の共役部分群の全体) とし，

$$\alpha : G \times C \to C, \qquad \alpha(x, H') = xH'x^{-1}$$

とする．任意の $H' \in C$ に対し $\alpha(e, H') = H'$ であり，さらに

$$\alpha(x, \alpha(y, H')) = \alpha(x, yH'y^{-1}) = xyH'y^{-1}x^{-1} = (xy)H'(xy)^{-1} = \alpha(xy, H')$$

より α は G の C 上の作用である． 定義より α は推移的であり，H に置ける α の固定部分群が $N_G(H)$ だから集合論的に $G/N_G(H) \simeq C$ となる．一方，(G に於ける $N_G(H)$ の指数) =($G/N_G(H)$ の剰余類の個数) だから

$$[G : N_G(H)] = \sharp(G/N_G(H)) = \sharp C$$

となる．

(4) $H \subsetneq G$ だと仮定する．$m = [G : N_G(H)]$ とし，$C = \{x_1Hx_1^{-1}, \cdots, x_mHx_m^{-1}\}$ となる $x_1 = e, x_2, \cdots, x_m \in G$ を取る．このとき $e \in H \cap xHx^{-1}$，特に $H \cap xHx^{-1} \neq \varnothing$ だから

$$\sharp G = \sharp\left(\bigcup_{x \in G} xHx^{-1}\right) = \sharp\left(\bigcup_{i=1}^{m} x_iHx_i^{-1}\right) < \sum_{i=1}^{m} \sharp(x_iHx_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} \sharp H = m \times \sharp H.$$

$H \leq N_G(H)$ と Lagrange の定理より $m = \sharp G/\sharp N_G(H) \leq \sharp G/\sharp H = [G : H]$ だから，再び Lagrange の定理より

$$\sharp G < [G : H] \times \sharp H = \sharp G$$

となるが，これは矛盾している．故に G と H は一致する． □

【問題】　群 G の部分群 H, K を考える．

$$N = \{g \in G \mid \ g^{-1}Kg = K\}$$

とし，さらに $X = H \cap N$, $Y = H \cap K$ とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　XK が G の部分群であることを示せ．

(2)　等式 $XK = HK \cap N$ が成り立つことを示せ．

(3)　Y は X の正規部分群であることを示せ．

(4)　剰余群 X/Y は N/K のある部分群に同型であることを示せ．

(H15 千葉大学理学研究科 数学・情報)

【解答】　(1)　X は 2 つの部分群の共通部分だから再び部分群となる．$h_i \in X,\ k_i \in K\ \ (i = 1, 2)$ とする．このとき

$$\begin{aligned} h_1k_1h_2k_2 &= h_1h_2 \cdot h_2^{-1}k_1h_2k_2 \in Xh_2^{-1}Kh_2K \subset XK \\ (h_1k_1)^{-1} &= k_1^{-1}h_1^{-1} = h_1^{-1}(h_1k^{-1}h_1^{-1}) \in Xh_1Kh_1^{-1} \subset XK \end{aligned}$$

より XK は部分群である．

(2)　$XK \subset HK$ であり，$K \subset N$ より $XK \subset N$ だから，$XK \subset HK \cap N$．一方，$g = hk \in HK \cap N$ だとする．任意の $y \in K$ について

$$hyh^{-1} = (gk^{-1})y(kg^{-1}) = g(k^{-1}yk)g^{-1} \in gKg^{-1} \subset K$$

より $h \in H \cap N = X$ だから，$g \in XK$，従って $HK \cap N \subset XK$ となる．

(3)　$K \subset N$ より $Y \subset X$．$y \in Y$，$x \in X$ とする．$x \in N, y \in K$ より $x^{-1}yx \in K$．また $x, y \in H$ より $x^{-1}yx \in H$．よって $x^{-1}Yx \subset Y$，即ち，Y は X の正規部分群となる．

(4)　標準埋め込み $\iota : X = H \cap N \hookrightarrow N$ と標準射影 $\pi : N \twoheadrightarrow N/K$ の合成を ϕ とする．$x \in X$ に対し

$$x \in \mathrm{Ker}\ \phi \quad \Leftrightarrow \quad \iota(x) \in K \quad \Leftrightarrow \quad x \in (H \cap N) \cap K = H \cap K = Y$$

より $\mathrm{Ker}\ \phi = Y$ となる．従って準同型定理より X/Y は N/K の部分群 $\mathrm{Im}\ \phi$ と同型となる．　□