No.

Date

H23実施 首都大 情報通信システム学域 (夏季)

[1-1]　$y=\sin(x^2-x)+\sqrt{x^2-1}$ を微分せよ.

[1-2]　$f(x)=e^x$ とする.

(a) $f^{(k)}(x)$ を求めよ.

(b) $f^{(k)}(0)$ を求めよ.

(c) $f(x)$ を Maclaurin 展開したときの剰余項 $R_n(x)$ を示せ.

(d) $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ を示せ.

(e) $f(x)$ の Maclaurin 展開を求めよ.

(f) $g(x)=e^{3x}$ の Maclaurin 展開を求めよ.

[1-3]

(a) $\int \frac{4\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ を求めよ.

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx$ を求めよ.

(c) $\int x^2\sin 3x\,dx$ を求めよ.

[1-4]　$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　$D: x^2+y^2\le x$　を求めよ.

(解) [1-1]　$y'=(2x-1)\cos(x^2-x)+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = (2x-1)\cos(x^2-x)+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ //

[1-2]

(a) $(e^x)'=e^x$ より $f^{(k)}(x)=e^x$ //

(b) (a)より $f^{(k)}(0)=e^0=1$ //

(c) $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\cdot x^n = \frac{e^{\theta x}}{n!}\cdot x^n$ // (但し $0<\theta<1$)

(d) x に対し $|x|<n_0$ となる整数 n_0 を1つ固定する. このとき $\frac{1}{k}\le\frac{1}{n_0}$ $(n_0\le k)$ より

$$\left|\frac{e^{\theta x}}{n!}\cdot x^n\right| \le e^{\theta|x|}\cdot\frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{n_0}\cdots\frac{|x|}{n}$$

$$\le e^{\theta|x|}\frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{n_0-1}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{n_0}\cdot\frac{|x|}{n_0}\cdots\frac{|x|}{n_0}}_{n-n_0+1}$$

$$= e^{\theta|x|}\frac{|x|^{n_0-1}}{(n_0-1)!}\cdot\left(\frac{|x|}{n_0}\right)^{n-n_0+1}\xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \qquad \left(\because \frac{|x|}{n_0}<1\right)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

No.

Date

(e) (d)より f(x)の Maclaurin展開は全てのxに収束.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ //}$$

(f) (e)より $g(x) = f(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$ //

[1-3]

(a) $\frac{4}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ と分解されると仮定し 右辺を通分し 左辺と比較すれば

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (A+C+2D)x + (A+B+D)}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

∴ $A+C=0$, $A+B+2C+D=0$, $A+C+2D=0$, $A+B+D=4$.

これより $A=B=2$, $C=-2$, $D=0$ を得る. 故に

$$\int \frac{4}{(x+1)^2(x^2+1)}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= 2\log|x+1| - \frac{2}{x+1} - \log(x^2+1) + C$$

$$= \log\frac{(x+1)^2}{x^2+1} - \frac{2}{x+1} + C \quad (C\text{は積分定数}) \text{ //}$$

(b) $t=3x+1$ と置く. $x=\frac{1}{3}(t-1)$, $dt=3dx$ より

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}dx = \frac{1}{3^2}\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{9}\int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})dt$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot t^{-\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{18}t^{-\frac{3}{2}}(t+1) + C = \frac{3x+2}{18(3x+1)\sqrt{3x+1}} + C \text{ //}$$

(c) $\int x^2 \sin 3x\,dx = \int x^2\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)'dx = -\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int 2x\cos 3x\,dx$

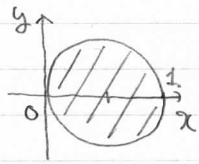
$$= -\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\left\{x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx\right\} =$$

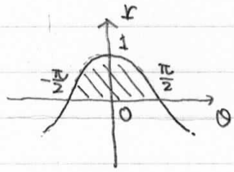
No.

Date

$= -\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C = \frac{1}{9}(3-x^2)\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + C$ //

[1-4] $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と置く。このとき





$x^2+y^2 \leq x \Leftrightarrow r^2 \leq r\cos\theta \quad \therefore\ r \leq \cos\theta$

$0 \leq x^2+y^2 \leq r\cos\theta \quad \therefore\ 0 \leq \cos\theta, \quad \therefore -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$x^2+y^2 \leq x$

$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4}$

$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{2^2}$

$D' : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq \cos\theta$ と置けば

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_{D'} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\theta)\, d\theta = \pi$$ //

No.

Date

H23 実施 首都大 情報通信システム学域 (夏季)

[2-1] $A=\begin{bmatrix}1&3\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}$ のとき $AX=B$, $YA=B$ となる X, Y は?

[2-2] 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&c\\-a&0&d&e\\-b&-d&0&f\\-c&-e&-f&0\end{vmatrix}$ の値を求めよ.

[2-3] $A=\begin{bmatrix}4&2\\3&5\end{bmatrix}$ を対角化せよ.

[2-4] 連立1次方程式 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0\\-2x_1-x_2-2x_3=0\\4x_1-7x_2+10x_3=0\end{cases}$ を解け. □

(解) [2-1] Aを左からXに掛けたとき, 結果は(2,1),(2,2)成分が必ず0になるので, $AX=B$となるXは存在しない。

一方, $Y=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$ と置く. $YA=\begin{bmatrix}x&3x\\z&3z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&6\end{bmatrix}$ より $Y=\begin{bmatrix}1&y\\2&w\end{bmatrix}$ (y, wは任意)

[2-2]

$$(\text{与式}) = (-a)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a&b&c\\-d&0&f\\-e&-f&0\end{vmatrix} + (-b)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a&b&c\\0&d&e\\-e&-f&0\end{vmatrix} + (-c)\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&b&c\\0&d&e\\-d&0&f\end{vmatrix}$$

$$= a(cdf-bef+af^2) - b(-be^2+cde+aef) + c(adf-bde+cd^2)$$

$$= a^2f^2+b^2e^2+c^2d^2+2acdf-2abef-2bcde = (af-be+cd)^2$$

[2-3]

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\3&5-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-9\lambda+14 = (\lambda-2)(\lambda-7).$$

$$\begin{bmatrix}4-2&2\\3&5-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}4-7&2\\3&5-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2\\3&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&-2\\0&0\end{bmatrix}$$

以上の計算より Aの固有値は 2, 7, それぞれに対する固有ベクトルは $c\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $c\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ $(c\neq 0)$

又, $P=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0\\0&7\end{bmatrix}$ となる.

[2-4]

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&-1&-2\\4&-7&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&-3&2\\0&-3&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&-3&6\\0&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&4\\0&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&4/3\\0&1&-2/3\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \therefore \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-4\\2\\3\end{bmatrix}\ (\text{cは任意})$$

H23実施　首都大　情報・通信（夏季）

［3-1］ $\phi(\mathbf{x}) = xyz$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, $C: \mathbf{x} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + at\,\mathbf{k}$ （aは定数, $0 \leq t \leq 2\pi$）とする.

（a） 曲線 C に沿ったスカラー場の線積分 $\int_C \phi\, dt$ を求めよ.

（b） 曲線 C に沿ったベクトル場の線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ を求めよ.

［3-2］ ベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$ の発散, 回転を求めよ.

［3-3］ $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$ （$a > 0$）とする.

（a） $x(t)$ の Fourier 変換を求めよ.

（b） $x(t)$ の振幅スペクトルを求めよ.

（c） $x(t)$ の位相スペクトルを求めよ.

［3-4］ 微分方程式 $x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$ を解け. □

（解）［3-1］（a）

$$\int_C \phi\, dt = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot a\sin t \cdot at\, dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi} t \cdot \sin 2t\, dt$$

$$= \frac{a^3}{2}\left\{\left[t \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\, dt\right\}$$

$$= \frac{a^3}{2}\left\{(-\pi) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}\right\} = -\frac{\pi}{2}a^3 \,/\!/$$

（b） $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi}\{(a\sin t)\cdot at\,\mathbf{i} + at \cdot a\cos t\,\mathbf{j} + a\cos t \cdot a\sin t\,\mathbf{k}\} \cdot (-a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + a\mathbf{k})\, dt$

$$= \int_0^{2\pi}(-a^3 t \cdot \sin^2 t + a^3 t\cos^2 t + a^3\cos t \cdot \sin t)\, dt$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}\left(t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) dt$$

$$= a^3\left\{\left[t \cdot \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2t\, dt + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2t\, dt\right\} = 0 \,/\!/$$

No.

Date

[3-2]

$$\mathrm{div}\,\mathbb{B} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$$ //

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{B} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix}$$

$$= (xz^2 - xy^2)\mathbb{i} - \mathbb{j}(yz^2 - x^2y) + \mathbb{k}(y^2z - x^2z)$$

$$= x(z^2-y^2)\mathbb{i} + y(x^2-z^2)\mathbb{j} + z(y^2-x^2)\mathbb{k}$$ //

[3-3]

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{1}{-(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to\infty}\frac{1}{-(a+j\omega)}(1-e^{-(a+j\omega)\varepsilon}) = \frac{1}{a+j\omega}$$ //

(b)(c) $$\frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}} - \frac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}}j\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{j\phi(\omega)} \quad \left(\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{a}\right)\right)$$

より 振幅スペクトルは $\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ // 位相スペクトルは $\tan^{-1}(-\frac{\omega}{a})$ //

[3-4] $u = \frac{y}{x}$ と置く. $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ より　　所謂「同次形」と呼ばれるヤツ.

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 - u^2 + 2u\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = 0.$$

$$\frac{2u}{1+u^2}du = -\frac{1}{x}dx, \quad \log(1+u^2) = -\log|x| + C$$

$$\therefore\ 1+u^2 = e^{\log(1+u^2)} = e^{-\log|x|+C} = e^C\frac{1}{|x|}$$

$\pm e^C$ を改めて C とし, 両辺に x^2 を掛ければ

$$x^2 + (xu)^2 = Cx, \qquad x^2 + y^2 = Cx$$ // (Cは任意定数)