No.

Date

H22 実施 首都大 情報・通信 (夏季)

[3-1] (a) デルタ関数 $\delta(t)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}[\delta]$ を求めよ.

(b) 周期 T の等間隔単位インパルス列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

の Fourier 級数展開 と δ_T のフーリエ変換を求めよ.

(c) $f(t)$, $g(t)$ の Fourier 変換を $F(\omega)$, $G(\omega)$ とするとき, 積 $f \cdot g$ の Fourier 変換 を F, G を用いて表わせ.

(d) $h(t)$ を周期 T で理想的に標本化した関数 $h_s(t)$ の Fourier 変換 $H_s(\omega)$ を求めよ. ただし $h(t)$ の Fourier 変換を $H(\omega)$ とする.

[3-2] (a) $y = a\sin bt$ より定数 a, b を消去し y の満たす微分方程式を求めよ.

(b) 微分方程式 $xy' = 2y$ の一般解を求め, 定数変化法を用いて微分方程式 $xy' - 2y - x = 0$ の一般解を求めよ. □

※ この年の応用数学は「知識を問う」問題. 不明な用語が連発するようなら選択してはいけません!!

(解) [3-1]

(a) $\mathcal{F}[\delta] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1$ //

(b) $$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t-mT) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{m \neq 0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt + \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore\ \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \ //$$

次に $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ を用いて

No.

Date

$$\mathcal{F}[\delta_T](\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[e^{j\frac{2\pi}{T}nt}] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - n\cdot\tfrac{2\pi}{T})$$

$$\therefore\ \mathcal{F}[\delta_T](\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\cdot\tfrac{2\pi}{T}).\ /\!/$$

(c) $$F*G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-a)G(a)\,da = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j(\omega-a)t}dt\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-ja\tau}d\tau\right)da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot g(\tau)\,e^{-j\omega t+jat-ja\tau}\,d\tau\right)dt\right)da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\tau a}e^{-jta}da\right)d\tau\right)e^{-j\omega t}\,dt$$

($\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\tau a}\cdot e^{-jta}da$ は $e^{j\tau a}$ の Fourier変換であり, $\mathcal{F}[e^{j\tau a}](t) = 2\pi\delta(t-\tau)$ より)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\cdot 2\pi\delta(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-j\omega t}dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore\ \mathcal{F}[f\cdot g](\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$$

(d) $h_s(t) = (\delta_T\cdot h)(t)$ と (c) より $\mathcal{F}[h_s](\omega) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[\delta_T]*H)(\omega)$

$$(\delta(\omega-n\cdot\tfrac{2\pi}{T})*H)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-a-n\cdot\tfrac{2\pi}{T})\cdot H(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(a-(\omega-n\cdot\tfrac{2\pi}{T}))\cdot H(a)\,da = H(\omega-n\cdot\tfrac{2\pi}{T})$$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[\delta_T]*H)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega-n\cdot\tfrac{2\pi}{T})*H)(\omega)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega-n\cdot\tfrac{2\pi}{T})$$

$$\therefore\ H_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega-n\cdot\tfrac{2\pi}{T})\ /\!/$$

No.

Date

んっ? bが消えない!

[3-2]

(a) $y' = ab\cos bt$, $y'' = -ab^2\sin bt = -b^2 y$. $\therefore\ y'' + b^2 y = 0$ //

(b) $xy' = 2y$, $\frac{1}{y}dy = \frac{2}{x}dx$. $\log|y| = \log x^2 + C$.

$\therefore\ y = \pm e^C \cdot x^2 = Cx^2$ // ($\pm e^C$ を改めて C と置いた).

今 C を x の関数だとし $y = Cx^2$ の両辺を x で微分すると

$y' = C'x^2 + 2Cx$, $xy' = C'x^3 + 2y$, $xy' - 2y - C'x^3 = 0$.

最後の式と $xy' - 2y - x = 0$ を比較し $C' = x^{-2}$. $\therefore\ C = -x^{-1} + C$ (Cは定数)

$\therefore\ y = Cx^2 - x$ (Cは定数) //