No.

Date

H22実施　首都大　情報・通信（夏季）.

[1-1] (a) f, g が $x=a$ で微分可能, $f(a)=g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる事を証明せよ.

(b) (a) を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}$ $(a\neq 0)$ を求めよ.

[1-2] (a) $f(x)=e^x \ln x$ を微分せよ.

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の全微分を求めよ.

[1-3]. (a) 不定積分 $\int e^x \cos x\, dx$ を求めよ.

(b) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}dx$ を求めよ.

[1-4] (a) $(1+x)^{-1}$ の $x=0$ に於ける Taylor 展開は？

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy = ?$

(解) [1-1] (a)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \,//$$

問題文の要請とは異ている.

もし ちがったら ごめん.

(b) $\displaystyle(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(ax)'} = \lim_{x\to a}\frac{a\cos ax}{a} = 1 \,//$

[1-2] (a) $\displaystyle f'(x) = e^x \ln x + e^x\cdot\frac{1}{x} = e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right) //$

(b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ より $\displaystyle df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} \,//$

No.

Date

cosx が出現 ⇒ 相方の sinx がいる

[1-3] (a) $I=\int e^x\cos x\,dx$, $J=\int e^x\sin x\,dx$ と置く. 部分積分より

$I=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$. $\therefore\ I-J=e^x\cos x$. …①

$J=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ $\therefore\ I+J=e^x\sin x$ …②

①+② より $2I=e^x\cos x+e^x\sin x$ $\therefore\ I=\frac{e^x}{2}(\cos x+\sin x)+C$ //

(b) $\int\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\log|x^2-1|+C$ //

分数式の基本 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$

[1-4] (a) $(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots=1-x+x^2+\cdots$ //

(b) $(\pm x)^2+(\pm y)^2=x^2+y^2$ より (与式) $=4\iint_D\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})\,dxdy$ $(D=\{(x,y):0\le x,y\})$.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と置くと $D\leftrightarrow D'=\{(r,\theta):0\le r,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$ より

(与式) $=4\iint_{D'}\exp(-\frac{r^2}{2})\,r\,drd\theta=\lim_{M\to\infty}4\int_0^M\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,d\theta\right)dr$

$=4\lim_{M\to\infty}\int_0^M re^{-\frac{r^2}{2}}dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=4\cdot\frac{\pi}{2}\lim_{M\to\infty}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^M$

$=2\pi\cdot\lim_{M\to\infty}\{-e^{-\frac{M^2}{2}}-(-1)\}=2\pi$ // ▨