H22 東工大 物理電子・情報

[A-1]

(1) $f(t)$ の Fourier 変換を $F(\omega)$ とするとき、$f(at-b)$ $(a \neq 0)$ の Fourier 変換を求めよ。

(2) 関数 $f(t), g(t)$ に対し

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds$$

とする。$f(t), g(t)$ の Fourier 変換を $F(\omega), G(\omega)$ とするとき、$h(t)$ の Fourier 変換は $F(\omega)\cdot G(\omega)$ である事を示せ。

(3)
$$f_1(t) = \begin{cases} c & (|t| \leq 1) \\ 0 & (|t| > 1) \end{cases} \qquad (c \neq 0)$$

と置く。$f_1(t)$ の Fourier 変換 $F_1(\omega)$ を求めよ。

(4) $F_2(\omega) = F_1(\omega)^2$ の逆 Fourier 変換 $f_2(t)$ の $t=0$ での値を求めよ。

(5) $f_2(t)$ の形状を図示せよ。 □

(解) (1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at-b)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega \frac{\tau+b}{a}} \cdot \frac{d\tau}{a} \qquad (at-b=\tau \text{ と置換})$$

$$= e^{-j\omega \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{e^{-j\omega\frac{b}{a}}}{a} \cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right) /\!/$$

(2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot g(t-s)\, ds \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot g(t-s)\, e^{-j\omega t} ds \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot g(t-s)\, e^{-j\omega t} dt \right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\, e^{-j\omega t} dt \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-j\omega(\tau+s)} d\tau \right) ds \qquad (\tau = t-s \text{ と置換})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-j\omega s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \right) ds = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-j\omega s} ds \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \right)$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t} dt = F(\omega)\cdot G(\omega) /\!/$$

No.

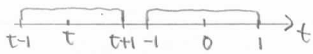
Date

(3) $F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{-1}^{1} c\cdot e^{-j\omega t}dt$

$= c\left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{1} = -\frac{c}{j\omega}(e^{-j\omega} - e^{j\omega}) = \frac{2c}{\omega}\,\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} = 2c\,\frac{\sin\omega}{\omega}$ //

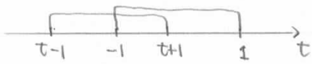
(4),(5) $f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)\cdot f_1(t-s)ds$ を計算すればよい.

i) $t < -2$ のとき



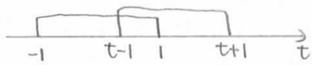
$f_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} 0\cdot c\,ds + \int_{-1}^{1} c\cdot 0\,ds = 0$

ii) $-2 \leq t < 0$ のとき



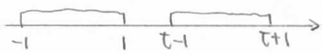
$f_2(t) = \int_{t-1}^{-1} 0\cdot c\,ds + \int_{-1}^{t+1} c^2 ds + \int_{t+1}^{1} c\cdot 0\,ds = c^2(t+2)$

iii) $0 \leq t < 2$ のとき



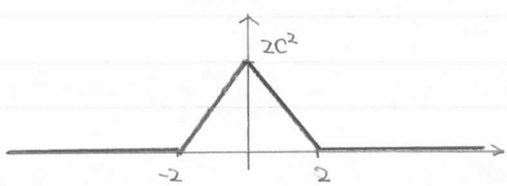
$f_2(t) = \int_{-1}^{t-1} c\cdot 0\,ds + \int_{t-1}^{1} c^2 ds + \int_{1}^{t+1} 0\cdot c\,ds = c^2(2-t)$

iv) $2 \leq t$ のとき



$f_2(t) = \int_{-1}^{1} c\cdot 0\,ds + \int_{t-1}^{t+1} 0\cdot c\,ds = 0.$

以上より $f_2(t)$ の概形は以下の通り：



特に $f_2(0) = 2c^2$ //.

ありゃ？ (1)は何かの誘導ではないの…