No.

Date

H19. 東工大 物理電子・情報

[A-2]

(1)(a) 3点 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ を通る平面ABCの方程式を求めよ.

(b) 原点を通り, 平面ABCに直交する直線の方程式を求めよ.

(c) 原点と平面ABCの距離を求めよ.

(2)
$$M=\begin{bmatrix} e^{-j\phi}\cos^2\theta+e^{j\phi}\sin^2\theta & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta & e^{j\phi}\cos^2\theta+e^{-j\phi}\sin^2\theta \end{bmatrix}\quad (\phi\neq n\pi)\ とする.$$

(a) M の固有値を求めよ.

(b) M の固有値に対する固有ベクトルを単位ベクトルになるように求めよ.

(c) M を対角化せよ. □

(解) (1) $\vec{AB}=(-a,b,0)$, $\vec{AC}=(-a,0,c)$ の外積は

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\left(\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -a \\ c & -a\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & b \\ -a & 0\end{vmatrix}\right)=(bc,ca,ab)$$

となる. $n=\dfrac{1}{\sqrt{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}}(bc,ca,ab)$ とすれば, n は平面ABCの単位法線ベクトル

であり, 又点Aを通るので, 求める方程式は

$$\frac{bc}{D}(x-a)+\frac{ca}{D}y+\frac{ab}{D}z=0,\quad \underline{\underline{\frac{bc}{D}x+\frac{ca}{D}y+\frac{ab}{D}z=\frac{abc}{D}}}\quad (D=\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2})$$

(原点を通り, 平面ABCに直交する直線) = (原点を通り, n を方向ベクトルとする直線) だから

この直線上の点 (x,y,z) は径数 t を用いて

$$(x,y,z)=(0,0,0)+tn=\left(\frac{bc}{D}t,\frac{ca}{D}t,\frac{ab}{D}t\right)$$

$$\therefore\ \frac{Dx}{bc}=\frac{Dy}{ca}=\frac{Dz}{ab},\quad \underline{\underline{\frac{x}{bc}=\frac{y}{ca}=\frac{z}{ab}}}$$

この直線と平面ABCとの交点は

$$\frac{bc}{D}\left(\frac{bc}{D}t\right)+\frac{ca}{D}\left(\frac{ca}{D}t\right)+\frac{ab}{D}\left(\frac{ab}{D}t\right)=\frac{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}{D^2}t=\frac{abc}{D}$$

$\therefore\ t=\dfrac{abc}{D}$ $\qquad\therefore$ (交点) $=\left(\dfrac{ab^2c^2}{D^2},\ \dfrac{a^2bc^2}{D^2},\ \dfrac{a^2b^2c}{D^2}\right)$

∴ (原点と平面ABCとの距離)

$$=\sqrt{\left(\frac{ab^2c^2}{D^2}-0\right)^2+\left(\frac{a^2bc^2}{D^2}-0\right)^2+\left(\frac{a^2b^2c}{D^2}-0\right)^2}$$

$$=\frac{1}{D^2}\sqrt{a^2b^4c^4+a^4b^2c^4+a^4b^4c^2}$$

$$=\frac{abc}{D^2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}=\underline{\underline{\frac{abc}{D}}}$$

(2) $$|M-\lambda I|=\begin{vmatrix} e^{-j\phi}\cos^2\theta+e^{j\phi}\sin^2\theta-\lambda & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta & e^{j\phi}\cos^2\theta+e^{-j\phi}\sin^2\theta-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(e^{-j\phi}\cos^2\theta+e^{j\phi}\sin^2\theta-\lambda)(e^{j\phi}\cos^2\theta+e^{-j\phi}\sin^2\theta-\lambda)-(e^{j\phi}-e^{-j\phi})^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=(e^{-j\phi}\cos^2\theta+e^{j\phi}\sin^2\theta)(e^{j\phi}\cos^2\theta+e^{-j\phi}\sin^2\theta)$$
$$\quad-(e^{-j\phi}\cos^2\theta+e^{j\phi}\sin^2\theta+e^{j\phi}\cos^2\theta+e^{-j\phi}\sin^2\theta)\lambda+\lambda^2-(e^{j\phi}-e^{-j\phi})^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=\cos^4\theta+(e^{-2j\phi}+e^{2j\phi})\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta$$
$$\quad-(e^{j\phi}+e^{-j\phi})\lambda+\lambda^2-(e^{2j\phi}-2+e^{-2j\phi})\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=\lambda^2-(e^{j\phi}+e^{-j\phi})\lambda+\cos^4\theta+2\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta$$

$$=\lambda^2-(e^{j\phi}+e^{-j\phi})\lambda+1=(\lambda-e^{j\phi})(\lambda-e^{-j\phi}).$$

従って Mの固有値は $\underline{e^{j\phi},\ e^{-j\phi}}$. それぞれに対する固有ベクトルを求めると $e^{j\phi}$ について

$$\begin{bmatrix} e^{-j\phi}\cos^2\theta+e^{j\phi}\sin^2\theta-e^{j\phi} & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta & e^{j\phi}\cos^2\theta+e^{-j\phi}\sin^2\theta-e^{j\phi} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (e^{-j\phi}-e^{j\phi})\cos^2\theta & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta & (e^{-j\phi}-e^{j\phi})\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$\theta=n\pi$ (nは整数)のとき $=\begin{bmatrix} -(e^{j\phi}-e^{-j\phi}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は固有ベクトル

$\theta\neq n\pi$ (nは整数)のとき $\to\begin{bmatrix} -\cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ は固有ベクトル

No.

Date

前者の場合は後者の特殊な場合となる. 従って $e^{j\phi}$ に対する固有ベクトルとして $\underline{\underline{\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}}}$ が
とれる. 次に $e^{-j\phi}$ に対し

$$\begin{bmatrix} e^{j\phi}\cos^2\theta + e^{j\phi}\sin^2\theta - e^{-j\phi} & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta & e^{j\phi}\cos^2\theta + e^{j\phi}\sin^2\theta - e^{-j\phi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin^2\theta & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta \\ (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\sin\theta\cos\theta & (e^{j\phi}-e^{-j\phi})\cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$\theta = n\pi$ (nは整数) のとき $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{j\phi}-e^{j\phi} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は固有ベクトル

$\theta \neq n\pi$ (nは整数) のとき $\longrightarrow \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$ は固有ベクトル

この場合も後者の特殊な場合として前者は含まれるので, $e^{-j\phi}$ に対する固有ベクトルとして $\underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}}}$
がとれる.

以上の考察を基に $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ と置けば, P は直交行列, 即ち ${}^tP = P^{-1}$ であり

$$\underline{\underline{{}^tPMP = P^{-1}M\cdot P = \begin{bmatrix} e^{-j\phi} & 0 \\ 0 & e^{j\phi} \end{bmatrix}}}$$ が成立する.

※ (1) は誘導に従ったが, 距離を求めるだけなら Hesse の標準形よりすぐに求められる.
(2) は見た目はごついが, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ により三角関数部分がサクサク消えるので
割合容易.

※ (1) の誘導は"点と平面の距離"を導く過程そのものである.

No.

Date

補足1 Hesseの標準形.

(空間の)平面の方程式 $ax+by+cz=d$ が与えられたとき.

1. $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ を計算する.
2. d が非負 (≥ 0) ならば $1/D$ を, dが負ならば $-1/D$ を与式の両辺に掛ける.

得られた結果 $a'x+b'y+c'z=d'$ $\left(a'=\pm\frac{a}{D},\ b'=\pm\frac{b}{D},\ c'=\pm\frac{c}{D},\ d'=\pm\frac{d}{D}\right)$ は

$\sqrt{(a')^2+(b')^2+(c')^2}=1$

「$\mathbf{n}=(a',b',c')$ は平面に対する単位法線ベクトル」,「$d'\geq 0$」

という状態になる. この結果の式を $ax+by+cz=d$ の"Hesseの標準形"と呼ぶ.
特に d' は原点と平面との距離に一致する.

例1 $5x+7y-2z=-\sqrt{13}$ に対し $\sqrt{5^2+7^2+(-2)^2}=\sqrt{78}$ であり, 右辺は負なので.
全体に $-1/\sqrt{78}$ を掛ければ $-\frac{5}{\sqrt{78}}x-\frac{7}{\sqrt{78}}y+\frac{2}{\sqrt{78}}z=\frac{1}{\sqrt{6}}$. これが $5x+7y-2z=-\sqrt{13}$ に対する Hesseの標準形となり, これより原点と平面との距離は $1/\sqrt{6}$ となる.