【問題】 関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx \tag{1}$$

で定義すると，Fourier 逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \tag{2}$$

で与えられる．ただし i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

I. Gauss 型関数 $f(x) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ の Fourier 変換 $F(\omega)$ を計算せよ．なお，定積分の値 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx$ $= \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ を用いてよい．

II. 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込みは

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \tag{3}$$

で与えられる．$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ の Fourier 変換をそれぞれ $F(\omega)$，$G(\omega)$，$H(\omega)$ としたとき，次式が成り立つことを証明せよ．

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega) \tag{4}$$

III. 積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{b^2}\right) dy = \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \tag{5}$$

の解 $f(x)$ を $a > b > 0$ の場合について求めよ．

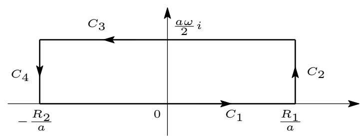
(H22 東京大工学研究科 電気)

【解答】 I. $\left(\frac{x}{a} + i\frac{a\omega}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + i\omega x - \frac{a^2\omega^2}{4}$ より

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - i\omega x\right) dx = \frac{e^{-\frac{a^2\omega^2}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{a^2}\left(x + i\frac{a^2\omega}{2}\right)^2\right\} dx.$$

今，積分路 $C_1, \cdots, C_4$ を

$$\begin{aligned}
C_1 &: \quad z = x && (-R_2 \to x \to R_1) \\
C_2 &: \quad z = R_1 + iy && (0 \to y \to \tfrac{a^2\omega}{2}) \\
C_3 &: \quad z = x + \tfrac{a^2\omega}{2} i && (R_1 \to x \to -R_2) \\
C_4 &: \quad z = -R_2 + iy && (\tfrac{a^2\omega}{2} \to y \to 0)
\end{aligned}$$



$(R_1, R_2 > 0)$ と設定し，$C = C_1 + \cdots + C_4$ とする．$f(z) = e^{-\frac{z^2}{a^2}}$ とするとき, Cauchy の積分定理より

$$\left|\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz\right| = \left|-\int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_4} f(z)dz\right| \leq \left|-\int_{C_2} f(z)dz\right| + \left|-\int_{C_4} f(z)dz\right|.$$

C_2, C_4 上の積分について

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \leq e^{-\frac{R_1^2}{a^2}} \int_0^{\frac{a^2\omega}{2}} e^{\frac{y^2}{a^2}} dy, \qquad \left|\int_{C_4} f(z)dz\right| \leq e^{-\frac{R_2^2}{a^2}} \int_0^{\frac{a^2\omega}{2}} e^{\frac{y^2}{a^2}} dy$$

だから，$R_1, R_2 \to \infty$ とすれば

$$\left|\int_{-R_2}^{R_1} f(x)dx - \int_{-R_2}^{R_1} f\left(x + \frac{a^2\omega}{2} i\right) dx\right| \leq \left(e^{-\frac{R_1^2}{a^2}} + e^{-\frac{R_2^2}{a^2}}\right) \int_0^{\frac{a^2\omega}{2}} e^{\frac{y^2}{a^2}} dy \ \to \ 0$$

だから，上の Gauss 積分の値より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{a^2}\left(x+i\frac{a^2\omega}{2}\right)^2\right\}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \sqrt{\pi}a \qquad \therefore \quad F(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2\omega^2}{4}}$$

II.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\exp(-i\omega x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(-i\omega y)g(x-y)\exp(-i\omega(x-y))dy\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(-i\omega y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-i\omega t)dt\right)dy \qquad (t = x-y) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(-i\omega y)dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-i\omega t)dt\right)\end{aligned}$$

よって $H(\omega) = \sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)$ となる．

III. $f(x)$ に対する Fourier 変換を $\mathscr{F}[f](\omega)$ と記すとき，I. II. の結果より

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f](\omega)\mathscr{F}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)\right](\omega) = \mathscr{F}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)\right](\omega) \qquad \therefore \quad \sqrt{2\pi}\mathscr{F}[f](\omega)\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}e^{-\frac{b^2\omega^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-\frac{a^2\omega^2}{4}}$$

再度 I. の結果より

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f](\omega) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}b}\exp\left(-\frac{(a^2-b^2)\omega^2}{4}\right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}b\sqrt{a^2-b^2}}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{(a^2-b^2)\omega^2}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{\pi}b\sqrt{a^2-b^2}}\mathscr{F}\left[\exp\left(-\frac{x^2}{a^2-b^2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}b\sqrt{a^2-b^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{a^2-b^2}\right)$$

□

〈雑感〉 II. について積分順序の交換可能性の検証は必要だが，後続の問題を考慮すれば，形式的な議論だけで十分かと思われる． □