

【問題】 実関数  $f(x)$  の複素 Fourier 級数は次のように与えられる。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

ただし

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

である。以下の問いに答えよ。

(1)  $f(x)$  の Fourier 級数は以下のように入えられる：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

このとき  $a_n, b_n$  をそれぞれ  $c_n$  を用いて表せ。

(2) 次の関係を示せ：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

ただし  $m$  と  $n$  は整数である。

(3)  $f(x) = \sum_{k=1}^4 \cos^k x$  を Fourier 級数に展開せよ。

(H29 東北大学工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$  及び

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = (c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx$$

より  $a_0 = 2c_0$ ,  $a_n = c_n + c_{-n}$ ,  $b_n = i(c_n - c_{-n})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

(2) 与式を  $I$  とする。  $m = n$  のとき

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} (\pi - (-\pi)) = 1.$$

一方、  $m \neq n$  のとき  $e^{-iN\pi} = e^{-iN\pi + i2N\pi} = e^{iN\pi}$  より

$$I = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{i(m-n)} e^{i(m-n)x} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(m-n)} (e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}) = \frac{1}{2\pi i(m-n)} (e^{i(m-n)\pi} - e^{i(m-n)\pi}) = 0.$$

(3)  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  より

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 + \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} + \frac{e^{-2ix} + 2 + e^{2ix}}{4} + \frac{e^{-3ix} + 3e^{-ix} + 3e^{ix} + e^{3ix}}{8} + \frac{e^{-4ix} + 4e^{-2ix} + 6 + 4e^{2ix} + e^{4ix}}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{-4ix}}{16} + \frac{e^{-3ix}}{8} + \frac{e^{-2ix}}{2} + \frac{7e^{-ix}}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7e^{ix}}{8} + \frac{e^{2ix}}{2} + \frac{e^{3ix}}{8} + \frac{e^{4ix}}{16}.$$

□

【問題】 関数  $f(t)$  の Laplace 変換  $F(s)$  を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

以下の問いに答えよ.

- (1)  $f(t)$  の  $n$  階微分の Laplace 変換を導け. ただし  $n$  は正の整数とする.
- (2) 問 (1) の結果を用いて  $\sin at$  と  $\cos at$  の Laplace 変換をそれぞれ求めよ. ただし  $a$  は正の定数とする.
- (3) 次の関係式を導け.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s).$$

ただし関数  $g(t)$  の Laplace 変換を  $G(s)$  とする.

- (4) 以下の方程式を Laplace 変換を用いて解け:

$$x(t) - \int_0^t \sin 2(t-\tau)x(\tau)d\tau = \sin 2t + \cos 2t.$$

(H29 東北大工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $n$  に関する帰納法により

$$[f^{(n)}](s) = s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - f^{(n-2)}(0)s - \dots - f^{(1)}(0)s^{n-2} - f(0)s^{n-1} \quad (1)$$

となる事を示す.  $n=0$  のときは自明.  $n>0$  のとき, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} [f^{(n)}](s) &= \lim_{T \rightarrow \infty} [f^{(n-1)}(t)e^{-st}]_0^T + s \int_0^{\infty} f^{(n-1)}(t)e^{-st} dt \\ &= -f^{(n-1)}(0) + s\{s^{n-1}F(s) - f^{(n-2)}(0) - \dots - f^{(1)}(0)s^{n-3} - f(0)s^{n-2}\} \\ &= s^n F(s) - f^{(n-1)}(0) - f^{(n-2)}(0)s - \dots - f^{(1)}(0)s^{n-2} - f(0)s^{n-1}. \end{aligned}$$

従って (1) が  $f$  の  $n$  階導関数の Laplace 変換像である.

- (2)  $f(t) = \sin at$  の Laplace 変換像を  $F(s)$  とする.  $f^{(2)}(t) = -a^2 f(t)$  より

$$-a^2 F(s) = \mathcal{L}[f^{(2)}(t)](s) = s^2 F(s) - f'(0) - f(0)s = s^2 F(s) + a, \quad \therefore \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

また  $a \cos at = (\sin at)'$  より

$$a \mathcal{L}[\cos at] = \mathcal{L}[(\sin at)'] = s \mathcal{L}[\sin at] - \sin a0, \quad \therefore \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

- (3)

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)e^{-st} d\tau \right) dt = \int_0^{\infty} \left( \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \right) g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} f(u)e^{-su} du \right) g(\tau)e^{-s\tau} d\tau = \left( \int_0^{\infty} f(u)e^{-su} du \right) \left( \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \right) = F(s)G(s). \end{aligned}$$

- (4)  $x$  の Laplace 変換像を  $X(s)$  とすると, 方程式の Laplace 変換像は

$$X(s) - \mathcal{L}[\sin 2t]X(s) = \mathcal{L}[\sin 2t] + \mathcal{L}[\cos 2t], \quad X(s) - \frac{2}{s^2 + 4}X(s) = \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{s}{s^2 + 4}.$$

これを  $X$  について解けば

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+2} = \frac{s}{s^2+2} + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \mathcal{L}[\cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t](s).$$

従って  $x(t) = \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t$  となる. □

【問題】 偶関数  $f(t)$  の Fourier 余弦変換  $F_c(\omega)$  を次のように定義する.

$$F_c(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

また,  $f(t)$  を用いて周期  $T$  の関数  $g(t)$  を以下のように定義する.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT)$$

$n$  を整数とするととき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $e^{-|t|}$  の Fourier 余弦変換を求めよ.
- (2)  $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  を示せ.
- (3) 区間  $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$  において,  $g(t)$  の Fourier 級数展開を

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) + b_n \sin \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) \right\}$$

とするととき, Fourier 係数  $a_0, a_n, b_n$  を, 偶関数  $f(t)$  の Fourier 余弦変換  $F_c(\omega)$  を用いて表せ.

- (4)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2n\pi)^2 + 1}$  を示せ.

(H28 東北大工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $I(x) = \int_0^x e^{-|t|} \cos \omega t dt = \int_0^x e^{-t} \cos \omega t dt$  と置く. 部分積分より

$$\begin{aligned} I(x) &= [-e^{-t} \cos \omega t]_0^x - \omega \int_0^x e^{-t} \sin \omega t dt \\ &= 1 - e^{-x} \cos \omega x - \omega \left\{ [-e^{-t} \sin \omega t]_0^x + \omega \int_0^x e^{-t} \cos \omega t dt \right\} \\ &= 1 + e^{-x} (\omega \sin \omega x - \cos \omega x) - \omega^2 I(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} e^{-|t|} \cos \omega t dt = \lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = \frac{1}{1 + \omega^2} \left( 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} (\omega \sin \omega x - \cos \omega x) \right) = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-nT - \frac{T}{2}}^{-nT + \frac{T}{2}} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t - nT) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) dt$$

従って  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt$  となる.

(3)  $n = 0$  のとき, (2) の結果より

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{4}{T} F_c(0)$$

$n > 0$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) dt = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t - mT) \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) dt \\ &= \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-mT - \frac{T}{2}}^{-mT + \frac{T}{2}} f(t) \cos \left( \frac{2n\pi(t + mT)}{T} \right) dt = \frac{2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-mT - \frac{T}{2}}^{-mT + \frac{T}{2}} f(t) \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) dt = \frac{4}{T} F_c \left( \frac{2n\pi}{T} \right). \end{aligned}$$

$a_n$  の場合と同様の計算により  $b_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt$  となるが、被積分関数は奇関数だから  $b_0 = 0$  となる。

(4)  $f(t) = e^{-|t|}$ ,  $T = 1$  とすると (1) (3) の結果より

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|t-n|} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4F_c(2n\pi) \cos(2n\pi t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n\pi)^2 + 1} \cos(2n\pi t)$$

ここで  $t = 0$  とすれば

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|n|} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n\pi)^2 + 1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(2n\pi)^2 + 1}$$

□

【問題】 関数  $f(t)$  の Laplace 変換  $F(s)$  を次のように定義する：

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(t) = \sqrt{t}$  のとき、 $\mathcal{L}[f(t)]$  を用いて  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  の Laplace 変換を表せ。
- (2)  $\sqrt{t}$  の Laplace 変換を求めよ。
- (3)  $n$  の非負整数とすると、

$$\frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

Laplace 変換を求めよ。（ヒント： $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{n+\frac{1}{2}}e^{-st} = 0$ ）

(H28 東北大学研究科 機械・知能)

【解答】 (1) Laplace 変換の微分法則より

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \mathcal{L}\left[(2\sqrt{t})'\right] = s\mathcal{L}\left[2\sqrt{t}\right] - 2\sqrt{0}, \quad \therefore \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = 2s\mathcal{L}[\sqrt{t}]$$

(2)  $\mathcal{L}\left[1/\sqrt{t}\right]$  について  $\tau = \sqrt{t}$  とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^{\infty} e^{-s\tau^2} 2d\tau = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

これと (1) を併せて

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{1}{2s} \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

(3)  $f(t) = t^{n+\frac{1}{2}}$  と置く。

$$f^{(k)}(t) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(n - k + 1 + \frac{1}{2}\right) t^{n-k+\frac{1}{2}} \quad (0 \leq k \leq n)$$

と Laplace 変換の微分法則より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[(t^{n+\frac{1}{2}})^{(n+1)}\right] &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - 1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \mathcal{L}\left[t^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= s^{n+1} \mathcal{L}\left[t^{n+\frac{1}{2}}\right] - f(0)s^n - f'(0)s^{n-1} - f''(0)s^{n-2} - \cdots - f^{(n)}(0) = s^{n+1} \mathcal{L}\left[t^{n+\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

$$\therefore s^{n+1} \mathcal{L}\left[\frac{t^{n+\frac{1}{2}}}{(n+\frac{1}{2})(n-1+\frac{1}{2})\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{s^{n+1}} \mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{n+2+\frac{1}{2}}}$$

□

【問題】 関数  $f(t)$  の Laplace 変換  $F(s)$  を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$n$  を正の整数,  $a$  を正の定数とすると, 以下の問いに答えよ. なお,  $f(t)$  の  $n$  階微分を  $f^{(n)}(t)$  と表すものとする.

(1) 以下の関係式が成立することを示せ.

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

(2) 問 (1) の関係式を用いて  $\cos at$  及び  $\sinh at$  の Laplace 変換をそれぞれ求めよ.

(3) Laplace 変換を用いて以下の微分方程式を解け.

$$\begin{aligned} f^{(3)}(t) + f^{(1)}(t) &= 2e^{-2t} \\ f(0) &= -1, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0 \end{aligned}$$

(H24 東北大工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = n = 1$  のとき, 部分積分法より

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [f(t)e^{-st}]_0^{\tau} - \int_0^{\infty} f(t)(-s)e^{-st} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau)e^{-s\tau} - f(0) + s\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

$n > 1$  のとき,  $n-1$  までの成立を仮定すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} [f^{(n-1)}(t)e^{-st}]_0^{\tau} - \int_0^{\infty} f^{(n-1)}(t)(-s)e^{-st} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} f^{(n-1)}(\tau)e^{-s\tau} - f^{(n-1)}(0) + s\mathcal{L}[f^{(n-1)}(t)] \\ &= 0 - f^{(n-1)}(0) + s \left( s^{n-1}\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f^{(1)}(0) - \dots - sf^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0) \right) \\ &= s^n \mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \dots - s^2 f^{(n-3)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

従って任意の正整数  $n$  について (1) の等式が成立する.

(2)  $(\cos at)^{(2)} = -a^2 \cos at$ ,  $(\sinh at)^{(2)} = a^2 \sinh at$  より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(\cos at)^{(2)}] &= s^2 \mathcal{L}[(\cos at)] - s \cos a0 + a \sin a0, & (s^2 + a^2)\mathcal{L}[(\cos at)] &= s, & \therefore \mathcal{L}[(\cos at)] &= \frac{s}{s^2 + a^2} \\ \mathcal{L}[(\sinh at)^{(2)}] &= s^2 \mathcal{L}[(\sinh at)] - s \sinh a0 - a \cosh a0, & (s^2 - a^2)\mathcal{L}[(\sinh at)] &= a, & \therefore \mathcal{L}[(\sinh at)] &= \frac{a}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

(3)  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$  と置く. (1) と  $\mathcal{L}[e^{-2t}] = 1/(s+2)$  より

$$s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f^{(1)}(0) - f^{(2)}(0) + sF(s) - f(0) = (s^3 + s)F(s) + s^2 - s + 1 = \frac{2}{s+2}, \quad F(s) = -\frac{s^2 + s - 1}{(s^2 + 1)(s + 2)}$$

右辺を部分分数展開すると

$$-\frac{s^2 + s - 1}{(s^2 + 1)(s + 2)} = -\frac{4}{5} \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{3}{5} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{5} \frac{1}{s + 2}.$$

(2) 及び  $\mathcal{L}[(\sin at)] = \frac{a}{s^2 + a^2}$  より

$$F(s) = -\frac{4}{5} \mathcal{L}[\cos t] + \frac{3}{5} \mathcal{L}[\sin t] - \frac{1}{5} \mathcal{L}[e^{-2t}] \quad \therefore f(t) = -\frac{4}{5} \cos t + \frac{3}{5} \sin t - \frac{1}{5} e^{-2t}$$

□

【問題】 関数  $f(t)$  の Laplace 変換  $F(s)$  を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

以下の問いに答えよ.

(1) Gauss 積分  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$  を用いて,  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  の Laplace 変換を求めよ.

(2)  $f(t) = \sqrt{t}$  の Laplace 変換が  $F(s) = \frac{A}{s^B}$  の形になることを示し, 定数  $A, B$  の値を求めよ.

(3)  $F(s) = \frac{1}{(s-\lambda)^{\frac{3}{2}}}$  の逆 Laplace 変換を求めよ. ただし  $\lambda$  は定数である.

(4) 以下の積分方程式を満たす関数  $x(t)$  を求めよ. 但し  $a$  は定数である.

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} x(\tau) d\tau = at$$

(H23 東北大工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $\tau = \sqrt{st}$  と置く.  $d\tau = \sqrt{s} dt / 2\sqrt{t}$  と Gauss 積分より

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

(2)  $d\sqrt{t}/dt = 1/2\sqrt{t}$  より

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = 2\mathcal{L}\left[\frac{d\sqrt{t}}{dt}\right] = 2(s\mathcal{L}[\sqrt{t}] - \sqrt{0}), \quad \therefore \mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

(3)  $f(s)$  を  $F(s)$  の原関数とする. 推移法則と (2) の結果より

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-\lambda t}] = \frac{1}{(s-\lambda-(-\lambda))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} = \mathcal{L}\left[\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\right] \quad \therefore f(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{\lambda t}$$

(4)  $x(t)$  の Laplace 変換を  $X(s)$  とする. このとき畳み込み定理より

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} x(\tau) d\tau\right] = X(s)\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\sqrt{\pi}s}{X}(s) = a\mathcal{L}[t] = \frac{a}{s^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{a}{\sqrt{\pi}s^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}} = \mathcal{L}\left[\frac{2a}{\pi}\sqrt{t}\right], \quad \therefore x(t) = \frac{2a}{\pi}\sqrt{t}$$

□

〈雑感〉 Laplace 変換の基本問題. 工学系の問題を扱うとき, 注意しなければならないのは「暗黙の了解」の部分. 例えば (1) に現れる  $\sqrt{s}$  は枝のとり方に注意しなければならないが, この辺りを“適当に”に扱う. □

【問題】 関数  $f(t)$  の Laplace 変換  $F(s)$  を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$n$  を正の整数,  $a$  を正の定数とすると, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\mathcal{L}[t^{n-1}]$  を使って  $\mathcal{L}[t^n]$  を表せ.  
(ヒント:  $\sigma > 0$  のとき  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0$ )
- (2)  $f(t) = e^{-\mu t} t^n$  とおく.  $\mathcal{L}[f(t - \lambda)]$  を求めよ. ただし  $\mu, \lambda$  は正の定数である.
- (3)  $\sin at$  の Laplace 変換を求めよ.
- (4)  $\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$  の逆 Laplace 変換を求めよ.

(H22 東北大学工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $s > 0$  とする. 部分積分とヒントより

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} t^n e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{s} [t^n e^{-st}]_0^{\varepsilon} + \frac{n}{s} \int_0^{\varepsilon} t^{n-1} e^{-st} dt \right\} \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon^n e^{-s\varepsilon} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}] \end{aligned}$$

(2) 推移法則, (1) 及び  $\mathcal{L}[1] = s^{-1}$  より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \lambda)](s) &= e^{-\lambda s} \mathcal{L}[f(t)](s) = e^{-\lambda s} \mathcal{L}[t^n](s + \mu) \\ &= e^{-\lambda s} \frac{n}{s + \mu} \frac{n-1}{s + \mu} \cdots \frac{2}{s + \mu} \frac{1}{s + \mu} \mathcal{L}[1](s + \mu) = \frac{n! e^{-\lambda s}}{(s + \mu)^{n+1}} \end{aligned}$$

(3)  $\sin at = (e^{jat} - e^{-jat})/2j$  より

$$\mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{1}{2j} \{ \mathcal{L}[1](s - ja) - \mathcal{L}[1](s + ja) \} = \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s - ja} - \frac{1}{s + ja} \right\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

(4) (3) の結果より

$$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + a^2} \right) = \frac{1}{a^2} \left( \mathcal{L}[t](s) - \frac{1}{a} \mathcal{L}[\sin at](s) \right)$$

より  $1/s^2(s^2 + a^2)$  の逆 Laplace 変換は

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2(s^2 + a^2)} \right] = \frac{t}{a^2} - \frac{\sin at}{a^3}$$

□

【問題】  $f(t)$  の Fourier 変換  $F(\omega)$  及び逆変換を次式で定義する：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

また  $f(x) = e^{-ax^2}$  ( $a > 0$ ) を Fourier 変換が  $F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$  となる事を既知とする。

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  を求めよ。

(2) 次式を満たす  $g(x)$  を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)g(y-z)g(z)dydz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x^2}{6}}.$$

(H19 東北大学工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $a = 1/2$  として既知の事実を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i0 \cdot x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} e^{-\frac{0^2}{4 \cdot 1/2}} = \sqrt{2\pi}.$$

(2)  $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y-z)g(z)dz$  と置き、更に  $g$  及び  $h$  の Fourier 変換を  $G(\omega)$ ,  $H(\omega)$  と置く。畳み込み定理より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)g(y-z)g(z)dydz \right) e^{-i\omega x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)h(y)dy \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= G(\omega)H(\omega) = G(\omega)^3. \end{aligned}$$

一方、方程式右辺の Fourier 変換は  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\pi}{1/6}} e^{-\frac{\omega^2}{4(1/6)}} = (2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{-3\frac{\omega^2}{2}}$  となる。

$$\therefore G(\omega)^3 = (2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{-3\frac{\omega^2}{2}}, \quad \therefore G(\omega) = \lambda^m \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad (\lambda = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, m = 0, 1, 2)$$

$e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$  の逆変換が  $\sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a\omega^2}$  であるから

$$g(x) = \lambda^m \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1/2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \lambda^m e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (\lambda = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, m = 0, 1, 2).$$

□

【問題】  $f(t)$  の Laplace 変換  $F(s)$  を次のように定義する:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

関数  $x(t), y(t)$  は次の連立一次方程式と初期条件を満たすとする:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin t - \int_0^t y(t-\tau)x(\tau)d\tau \\ \frac{dy}{dt} = t - 3 \int_0^t (t-\tau) \frac{dy}{d\tau}(\tau)d\tau \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- (1)  $x, y$  の Laplace 変換  $X(s), Y(s)$  を求めよ.  
 (2)  $x, y$  を求めよ.

(H19 東北大工学研究科 機械・知能)

【解答】 (1)  $f$  に対し  $F(s) = \mathcal{L}[f(s)]$  と記す事にする. 与式の両辺を Laplace 変換すると

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = \mathcal{L}[\sin t] - Y(s)X(s), \\ sY(s) - y(0) = \mathcal{L}[t] - 3\mathcal{L}[t](sY(s) - y(0)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX(s) = \frac{1}{s^2+1} - Y(s)X(s), \\ sY(s) - 1 = \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2}(sY(s) - 1), \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} X(s) = \frac{s(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+2)^2}, \\ Y(s) = \frac{s^2+4}{s(s^2+3)} \end{cases}.$$

(2)  $X$  は  $X(s) = 2\frac{s}{s^2+1} - 2\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$  と部分分数展開できる.  $\frac{s}{s^2+1}, \frac{s}{s^2+2}$  はそれぞれ  $\cos t, \cos\sqrt{2}t$  の Laplace 変換. 一方,  $\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{s^2+2} \frac{s}{s^2+2}$  は  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t$  と  $\cos\sqrt{2}t$  の合成積の Laplace 変換であり,

$$\begin{aligned} (\sin\sqrt{2}t) * (\cos\sqrt{2}t) &= \int_0^t \sin\sqrt{2}(t-\tau) \cos\sqrt{2}\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \{ \sin\sqrt{2}t + \sin\sqrt{2}(t-2\tau) \} d\tau = \frac{t}{2} \sin\sqrt{2}t. \end{aligned}$$

$$\therefore x(t) = \frac{2 \cos t - 2 \cos\sqrt{2}t - \frac{t}{2\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t}{2\sqrt{2}}.$$

一方,  $Y(s)$  についても同様の計算により  $Y(s) = \frac{4}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \frac{s}{s^2+3}$  と部分分数展開でき,  $\frac{1}{s}, \frac{s}{s^2+3}$  の逆変換はそれぞれ  $1, \cos\sqrt{3}t$  だから

$$Y(s) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos\sqrt{3}t.$$

□