【問題】　関数 $f(t)$ の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(a)　単位インパルス関数 (デルタ関数)　$\delta(t)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}[\delta(t)]$ を求めよ．

(b)　周期 T の等間隔単位インパルス列

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

を Fourier 級数展開し，その式を Fourier 変換することで，$\delta_T(t)$ の Fourier 変換を計算せよ．ただし指数関数 $e^{j\omega_0 t}$ の Fourier 変換は

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

である．

(c)　2 つの時間関数 $f(t)$，$g(t)$ の Fourier 変換をそれぞれ $F(\omega)$，$G(\omega)$ とする．このとき両関数の積 $f(t)g(t)$ の Fourier 変換を $F(\omega)$，$G(\omega)$ を用いて表せ．

(d)　(b) と (c) の結果を用いて時間関数 $h(t)$ を周期 T で理想的に標本化した関数 $h_s(t)$ の Fourier 変換 $H_s(t)$ を求めよ．ただし $h(t)$ の Fourier 変換を $H(\omega)$ とする．

(H23 首都大学東京情報通信システム学域)

【解答】　(a)　$\mathcal{F}[\delta(t)] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-\omega \cdot 0} = 1$

(b)　周期 T の関数 $f(t)$ は $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$　$\left(c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt\right.$ と Fourier 級数展開される．$f(t) = \delta_T(t)$ とすると

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t - mT) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{m\neq 0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t - mT) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt + \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}\sum_{m\neq 0} 0 + \frac{1}{T} e^{-j\frac{2\pi}{T}n\cdot 0} = \frac{1}{T}
\end{aligned}$$

より　$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$ となる．ここで $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ を用いれば

$$\mathcal{F}[\delta_T](\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right](\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - 2n\pi/T\right).$$

(c) F, G の合成積 $F * G(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \sigma) G(\sigma) d\sigma$ について

$$\begin{aligned}
F * G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega-\sigma)t} dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\sigma\tau} d\tau\right) d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\sigma t} e^{-j\sigma\tau} d\sigma\right) d\tau\right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\mathcal{F}[e^{j\sigma t}](\tau) d\tau\right) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) 2\pi\delta(\tau - t) d\tau\right) e^{-j\omega t} dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

従って　$\mathcal{F}[fg](\omega) = \dfrac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$　となる．

(d) $h_s(t) = (\delta_T h)(t)$, (c) 及び (b) より

$$
\begin{aligned}
H_s(\omega) = \mathcal{F}[h_s](\omega) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[\delta_T] * H)(\omega) &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(\omega - 2n\pi/T\right) * H\right)(\omega) \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \sigma - 2n\pi/T\right)H(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\sigma - (\omega - 2n\pi/T)\right)H(\sigma)d\sigma = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H\left(\omega - 2n\pi/T\right)
\end{aligned}
$$

□