【問題】 次の微分方程式を解け．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{-2x}$$

(S55 東京工業大)

【解答】 与式の両辺に e^{2x} を掛けたものの左辺に

$$\frac{d(e^{2x}y)}{dx} = 2e^{2x}y + e^{2x}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2(e^{2x}y)}{dx^2} = 4e^{2x}y + 4e^{2x}\frac{dy}{dx} + e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2}$$

を代入すると

$$e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2} + 2e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = \frac{d^2(e^{2x}y)}{dx^2} - 2\frac{d(e^{2x}y)}{dx} + 2e^{2x}y = x \tag{1}$$

となる．方程式の形より $e^{2x}y = Ax + B$ という特殊解があるとして，方程式 (1) に代入すると

$$0 - 2A + 2(Ax + B) = x, \qquad (2A - 1)x + 2B - 2A = 0 \qquad \therefore \quad A = B = \frac{1}{2}.$$

従って $e^{2x}y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ という特殊解を得る．一方，方程式 (1) に対応する斉次方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解は $y = e^{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ (C_1, C_2 は任意定数) により与えられるから，求める一般解は

$$e^{2x}y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + e^{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \qquad \therefore \quad \underline{y = \frac{e^{2x}}{2}(x + 1) + e^{-x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

□