【問題】　次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$\dfrac{dy}{dx} = (y-x+1)^2$

(2)　$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = \sin x$

(3)　$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 4y = \log x \quad (x>0)$

(R1 東北大工学研究科機械)

【解答】　(1)　$u = y - x + 1$ とすると $\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$ だから，与式は $\frac{du}{dx} = u^2 - 1$ という変数分離形となる．C を任意定数とすれば

$$\frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du = -dx, \qquad \frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = -x + C, \qquad \frac{u-1}{u+1} = Ce^{-2x} \quad (C\text{ は任意定数})$$

$$\therefore \quad u = \frac{e^{2x}+C}{e^{2x}-C}, \qquad y = x - 1 + \frac{e^{2x}+C}{e^{2x}-C} \quad (C\text{ は任意定数})$$

(2)　右辺 $=0$ としたときの斉次方程式の一般解は $y = e^x(c_1\sin 2x + c_2\cos 2x)$．　一方，方程式の形より $y = A\cos x + B\sin x$ という特殊解を持つ事が予想され，これを代入すると

$$-(A\cos x + B\sin x) - 4(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 4(A-B)\cos x + 4(A+B)\sin x = \sin x$$

より $A = B = \frac{1}{8}$ となる．故に一般解は $y = \frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + e^x(c_1\sin 2x + c_2\cos 2x)$ $(c_1, c_2$ は任意定数$)$．

(3)　$x = e^t$ とすると $\frac{d}{dt} = x\frac{d}{dx}$，$\frac{d^2}{dt^2} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}$ だから

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = t \tag{1}$$

となる．(1) の右辺 $=0$ の場合の一般解は $y = (c_1 + c_2t)e^{2t}$．一方，(1) の形より $y = At + B$ という特殊解を持つと予想され，これを代入すると $4At + 4(B-A) = t$，$A = B = \frac{1}{4}$．故に一般解は

$$y = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} + (c_1 + c_2t)e^{2t} = \frac{1}{4}\log x + \frac{1}{4} + (c_1 + c_2\log x)x^2 \qquad (c_1, c_2\text{ は任意定数}).$$

□

【問題】 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-3y-(x+1)^3=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+5y=e^x\cos x$

(3) $x\dfrac{dy}{dx}\cos\dfrac{y}{x}+x=y\cos\dfrac{y}{x}$

(H30 東北大工学研究科機械)

【解答】 (1) $e^{-\int\frac{3}{x+1}dx=(x+1)^{-3}}$ を両辺に掛けると

$$(x+1)^{-3}\frac{dy}{dx}-3(x+1)^{-4}y=\frac{d}{dx}\left((x+1)^{-3}y\right)=(x+1)^{-1}$$

$$\therefore\quad (x+1)^{-3}y=\log(x+1)+C,\qquad y=(x+1)^4+C(x+1)^3\qquad (C\text{ は任意定数})$$

(2) 斉次定数係数線形常微分方程式 $y''-2y'+5y=0$ の一般解は $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$ $(c_1,c_2$ は任意定数$)$. 一方，元の方程式の形より $y=e^x(A_1\cos x+A_2\sin x)$ という形の特殊解を持つと予想される．これを方程式に代入すれば

$$y''-2y'+5y=e^x((3A_1+A_2)\cos x+(3A_2-A_1)\sin x)=e^x\cos x$$

より $A_1=\frac{3}{10}$，$A_2=\frac{1}{10}$ となる．斉次形の場合と併せて，非斉次形の場合の一般解は $y=\frac{3}{10}e^x\cos x+\frac{1}{10}e^x\sin x+=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$ $(c_1,c_2$ は任意定数$)$.

(3) $y=xu$ と置く．$y'=u+xu'$ より

$$(u+xu')\cos u+1=u\cos u,\qquad \cos u du=-\frac{dx}{x},\qquad \sin u=C-\log x$$

故に $y=x\sin^{-1}(C-\log x)$ $(C$ は任意定数$)$. □

【問題】

(1)　次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(a)　$(x^2-y^2)\dfrac{dy}{dx}=2xy$

(b)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}\cos 2x+2x$

(2)　次の y 及び z に関する連立常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}-2\dfrac{dz}{dx}+3z=0 \\ \dfrac{dy}{dx}-4y-3z=0 \end{cases}$$

(H29 東北大工学研究科機械)

【解答】　(1) (a)　$y=xu$ と置く．$y'=u+xu'$ より

$$(1-u^2)(u+xu')=2u, \qquad \left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dx}{x}, \qquad \log\left|\frac{u}{1+u^2}\right|=\log Cx$$

$\pm C$ を改めて C と置けば $y=C(x^2+y^2)$　(C は任意定数).

(b)　斉次定数係数線形常微分方程式 $y''-2y'+y=0$ の一般解は $y=e^x(c_1+c_2x)$　(c_1,c_2 は任意定数)．非斉次定数係数線形常微分方程式 $y''-2y'+y=e^{-x}\cos 2x$ は方程式の形より $y=e^{-x}(A_1\cos 2x+A_2\sin 2x)$ という形の特殊解を持つと予想される．これを方程式に代入すれば

$$y''-2y'+5y=-8e^{-x}(-A_1\sin 2x+A_2\cos 2x)=e^{-x}\cos 2x$$

より $A_1=0,\ A_2=-\frac{1}{8}$ となる．更に非斉次定数係数線形常微分方程式 $y''-2y'+y=2x$ は方程式の形より $y=B_1+B_2x$ という形の特殊解を持つと予想される．これを方程式に代入すれば $B_1=2, B_2=1$ となる．斉次形の場合と併せて，非斉次形の場合の一般解は $y=-\frac{1}{8}e^{-x}\sin 2x+x+2+e^x(c_1+c_2x)$　(c_1,c_2 は任意定数).

(2)　後者より $y''-4y'-3z'=0$．$-2z'=-y'-3z$ だから，$2y''-8y'-6z'=2y''-11y'-9z=0$．$-3z=-y'+4y$ より $y''-7y'+6y=0$．この斉次定数係数線形常微分方程式の一般解は $y=c_1e^x+c_2e^{6x}$ であり，

$$z=\frac{1}{3}y'-\frac{4}{3}y=\frac{1}{3}(c_1e^x+6c_2e^{6x})-\frac{4}{3}(c_1e^x+c_2e^{6x})=-c_1e^x+\frac{2c_2}{3}e^{6x}.$$

$\frac{c_2}{3}$ を改めて c_2 と置けば

$$y=c_1e^x+3c_2e^{6x}, \qquad z=-c_1e^x+2c_2e^{6x} \qquad (c_1,c_2 \text{ は任意定数})$$

□

【問題】　関数 $u(x,y)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x+3y} \tag{1}$$

を満足する．2 つの異なる実数 s,t を用いて $\xi = x+sy$, $\eta = x+ty$ なる座標変換を考える．以下の問いに答えよ．

(i) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ をそれぞれ u, ξ, η を用いて表せ．
(ii) 関数 u が満足する ξ と η に関する偏微分方程式を求めよ．
(iii) 問 (ii) の結果において，$s=0$, $t=1$ として一般解 $u(x,y)$ を求めよ

(H29 東北大工学研究科機械)

【解答】 (i) 連鎖律より

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \xi_x^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_x\eta_x u_{\xi\eta} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx}u_\xi + \eta_{xx}u_\eta, = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{yy} &= \xi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_y\eta_y u_{\xi\eta} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + \xi_{yy}u_\xi + \eta_{yy}u_\eta, = s^2 u_{\xi\xi} + 2st u_{\xi\eta} + t^2 u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= \xi_x\xi_y u_{\xi\xi} + \xi_x\eta_y u_{\xi\eta} + \eta_x\xi_y u_{\eta\xi} + \eta_x\eta_y u_{\eta\eta} + \xi_{xy}u_\xi + \eta_{xy}u_\eta = s u_{\xi\xi} + (t+s)u_{\xi\eta} + t u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

(ii) (i) の結果を与式に代入して $(s-s^2)u_{\xi\xi} + (t+s-2st)u_{\xi\eta} + (t-t^2)u_{\eta\eta} = e^{\frac{(s-3)\eta-(t-3)\xi}{s-t}}$.

(iii) (ii) の結果より方程式は $u_{\xi\eta} = e^{3\eta-2\xi}$ となるから，

$$u_\xi = \frac{1}{3}e^{3\eta-2\xi} + f(\xi), \qquad u = -\frac{1}{6}e^{3\eta-2\xi} + \int f(\xi)d\xi + G(\eta)$$

$$\therefore \quad u = -\frac{1}{6}e^{x+3y} + F(x) + G(x+y) \qquad (F,\ G \text{ は任意の関数}).$$

□

【問題】　以下の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=0$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$

(3)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}\log_e x$

(H28 東北大工学研究科機械)

【解答】　(1) $y=xu$ と置く． $y'=u+xu'$ より

$$(1+u^2)(u+xu')=u,\qquad \left(\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x},\qquad -\frac{1}{2u^2}+\log|u|=\log Cx$$

$\pm1/C^2$ を改めて C と置いて

$$\frac{x^2}{y^2}=\log(Cy^2/x^4),\qquad \therefore\quad x^2=y^2\log(Cy^2/x^2)\qquad (C\text{ は任意定数})$$

(2)　両辺に $e^{\int 2\tan x dx}=(\cos x)^{-2}$ を掛けて，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\cos^2 x}\right)=\frac{\sin}{\cos^2 x},\qquad y=\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos x}+C\right)=\cos x+C\cos^2 x\qquad (C\text{ は任意定数})$$

(iii)　$u=e^x y$ と置く．このとき

$$u''=e^x y''+2(e^x)'y'+(e^x)''y=e^x(y''+2y'+y)=\log_e x$$

となる．これを積分して

$$\begin{aligned} u'&=\int\log_e x dx+c_1=x\log_e x-x+c_1,\\ u&=\int(x\log_e x-x+c_1)dx+c_2=\frac{x^2}{2}\log_e x-\frac{3}{4}x^2+c_1x+c_2\\ \therefore\qquad y&=\frac{x^2}{2}e^{-x}\log_e x-\frac{3}{4}x^2e^{-x}+(c_1x+c_2)e^{-x}\qquad (c_1,c_2\text{ は任意定数})\end{aligned}$$

□

【問題】　関数 $u(x,y,t)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (0 < x < L,\ 0 < y < L,\ 0 < t) \tag{1}$$

及び境界条件

$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = u(x,0,t) = u(x,L,t) = 0 \tag{2}$$

を満足する．α, L を正の定数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$u(x,y,t) = f(x)g(y)h(t)$ と置く．

a)　$f(x)$ 及び $g(y)$ が満足する微分方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\lambda f(x), \qquad \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -\eta g(y) \tag{3}$$

となる事を示せ．ただし λ, η は正の定数である．

b)　$h(t)$ が満足する微分方程式を求めよ．

(2)　$u(x,y,t)$ が次式で与えられる事を導け．

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)e^{-\frac{m^2+n^2}{L^2}\pi^2\alpha t}$$

ただし，A_{mn} は定数である．

(3)　$u(x,y,t)$ が境界条件　$u(x,y,0) = x(x-L)\sin\left(\dfrac{2\pi y}{L}\right)$ を満たすとき，問 (2) の A_{mn} を求めよ．

(H28 東北大工学研究科機械)

【解答】 (1)　方程式に代入し，更に u で割れば

$$f(x)g(x)\frac{dh(t)}{dt} = \alpha\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}g(x)h(t) + f(x)\frac{d^2 g(y)}{dy^2}h(t)\right), \qquad \frac{1}{h(t)}\frac{dh(t)}{dt} = \alpha\left(\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2}\right)$$

第 2 式の左辺は t のみ，右辺は x, y のみの関数だから，

$$\frac{dh(t)}{dt} = \nu\alpha h(t), \qquad \frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = \nu \qquad (\nu \text{ は定数}) \tag{4}$$

と表される．更に $\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = \nu - \dfrac{1}{g(y)}\dfrac{d^2 g(y)}{dy^2}$ となり，左辺は x のみ，右辺は y のみの関数だから

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \nu - \frac{1}{g(y)}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -\lambda, \qquad \therefore\quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\lambda f(x), \quad \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -\eta g(y) \quad (\eta = -\nu - \lambda)$$

となる．境界条件について

$$f(0)g(y)h(t) = f(L)g(y)h(t) = f(x)g(0)h(t) = f(x)g(L)h(t) = 0$$

より恒等的に 0 ではない解 u が存在する為には $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$ でなければならない．この境界条件の下で $\lambda > 0$ となる．実際，$-\lambda$ の平方根 (の一つ) を $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$ とすると $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda f$ の解は

$$f = Ce^{\sqrt{-\lambda}x} + De^{-\sqrt{-\lambda}x} \qquad (C, D \text{ は任意定数})$$

だから，境界条件より $C + D = 0$, $Ce^{\sqrt{-\lambda}L} + De^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0$，よって

$$e^{2\sqrt{-\lambda}L} = 1, \qquad \sqrt{-\lambda}L \in \pi i\mathbb{Z}, \qquad \lambda = \frac{m^2\pi^2}{L^2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

だから $\lambda \geq 0$．仮に $\lambda = 0$ だとすると (3) の解は $f = C + Dx$ という形になるが，この形の解で境界条件を満たすものは $C = D = 0$ のときのみだから，$f \neq 0$ ならば $\lambda > 0$ となる．η についても同様．

(2)　(1) の計算より (3) の境界値を満たす解 f, g はそれぞれ

$$f(x) = A\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right), \qquad g(y) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right), \qquad (m, n = 1, 2, \cdots,\ A, B \text{ は任意定数})$$

また $\nu = -\lambda - \eta$ 及び (4) より

$$h(t) = C\exp(\nu\alpha t) = C\exp\left(-\frac{m^2+n^2}{L^2}\pi^2\alpha t\right) \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる．従って

$$u_{mn}(x,y,t) := \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\exp\left(-\frac{m^2+n^2}{L^2}\pi^2\alpha t\right)$$

は (1) (2) を満たす．さらに線形性より線形和 $\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}u_{mn}(x,y,t)$ (A_{mn} は定数) も解となる．

(3)

$$\frac{2}{L}\int_0^L x(x-L)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \frac{4L^2}{m^3\pi^3}((-1)^m - 1)$$

より $x(x-L)$ の x に関する Fourie-sin 級数展開は

$$\begin{aligned} x(x-L) &\sim \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{L}\int_0^L x(x-L)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{m^3\pi^3}((-1)^m-1)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8L^2}{(2m-1)^3\pi^3}\sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

$$u(x,y,0) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8L^2}{(2k-1)^3\pi^3}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}y\right)$$

これと (2) の表示を比較すれば A_{mn} は 1 以上の m,n に対し次の通りである．

$$A_{mn} = \quad -\frac{8L^2}{m^3\pi^3} \quad (m \text{ が奇数，かつ } n=2 \text{ のとき}), \qquad 0 \quad (\text{その他}).$$

□

【問題】　関数 $u(x,t)$ は次の偏微分方程式並びに境界条件を満足するものとする:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x \qquad (0\le x\le 1,\ 0\le t), \qquad u(0,t)=u(1,t)=0, \quad u(x,0)=\frac{x^2}{3}(1-x).$$

(1)　$u(x,t)=v(x,t)+g(x)$ と置くとき, $v(x,t)$ は次の偏微分方程式, 並びに境界条件を満足するものとする：

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad v(0,t)=v(1,t)=0.$$

このとき $g(x)$ を求めよ.

(2)　前問の結果を用いて $u(x,t)$ を求めよ.

(H19 東北大工学研究科機械)

【解答】 (1) $u_t=u_x$, $u_{xx}=v_{xx}+g''$ より

$$2x=u_t-u_{xx}=v_t-(v_{xx}+g'')=v_t-v_{xx}-g''=-g''.$$

従って $g''(x)=-2x$, $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+c_1x+c_2$ $(c_1,c_2$ は定数) となる. 一方, 境界条件 $g(0)=g(1)=0$ より $c_2=0$, $c_1=\frac{1}{3}$. よって $\underline{g(x)=-\frac{1}{3}x(x^2-1)}$ となる.

(2) $v_t=v_{xx}$, $v(0,t)=v(1,t)=0$ を満たす変数分離解は

$$v_n(x,t)=e^{-(n\pi)^2t}\sin(n\pi x) \qquad (n=1,2,\cdots)$$

により与えられる. これを用いて

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nv_n(x,t)+\frac{1}{3}x(1-x^2) \qquad (c_n \text{ は定数})$$

と置く. 境界条件 $u(x,0)=\frac{x^2}{3}(1-x)$ より

$$\frac{x^2}{3}(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\pi x)+\frac{1}{3}x(1-x^2), \qquad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\pi x)=\frac{x}{3}(x-1).$$

直交関係 $\displaystyle\int_0^1\sin(m\pi x)\sin(n\pi x)dx=\frac{1}{2}\delta_{mn}$ より

$$\begin{aligned}\frac{c_m}{2}&=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_0^1\sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx\\&=\int_0^1\left\{\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\pi x)\right\}\sin(m\pi x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1(x^2-x)\sin(m\pi x)dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1x\sin(m\pi x)dx&=\left[x\left\{-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi x)\right\}\right]_0^1+\frac{1}{m\pi}\int_0^1\cos(m\pi x)dx\\&=-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi)+\frac{1}{(m\pi)^2}\left[\sin(m\pi x)\right]_0^1=\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1x^2\sin(m\pi x)dx&=\left[x^2\left\{-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi x)\right\}\right]_0^1+\frac{2}{m\pi}\int_0^1x\cos(m\pi x)dx\\&=-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi)+\frac{2}{m\pi}\left\{\left[x\frac{1}{m\pi}\sin(m\pi x)\right]_0^1-\frac{1}{m\pi}\int_0^1\sin(m\pi x)dx\right\}\\&=\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}-\frac{2}{(m\pi)^2}\left[-\frac{1}{m\pi}\cos(m\pi x)\right]_0^1=\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}+\frac{2}{(m\pi)^3}((-1)^m-1).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad c_m=\frac{2}{3}\left\{\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}+\frac{2}{(m\pi)^3}((-1)^m-1)-\frac{(-1)^{m+1}}{m\pi}\right\}=\frac{4\{(-1)^m-1\}}{3(m\pi)^3}.$$

$$\therefore \quad u(x,t)=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\{(-1)^n-1\}}{3(n\pi)^3}e^{-(n\pi)^2t}\sin(n\pi x)+\frac{x}{3}(1-x^2).}$$

□