【問題】 可分な無限次元 Hilbert 空間 H の完全正規直交系を $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし，

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,\ x_n \in \mathbb{C} \right\}$$

と置く．このとき次の問いに答えよ．

(1) $Se_n = e_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ で定義される H 上の線形作用素 S の作用素ノルム $\|S\|$ は 1 である事を示せ．

(2) T を $T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{x_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ で定義される ℓ^2 上の有界線形作用素とする．ただし $x_0 = 0$ とする．このとき $USU^{-1} = T$ を満たす等距離作用素 $U : H \to \ell^2$ を求めよ．

(3) H の単位球 $H_1 = \{\boldsymbol{v} \in H \mid \|\boldsymbol{v}\| \le 1\}$ の S による像 $S(H_1)$ は相対コンパクトではない事を示せ．

(4) $|c| > 1$ を満たす任意の複素数 c に対し，$S - cI$ は H 上で有界な逆作用素を持つ事を示せ．ただし I は H 上の恒等作用素を表す．

(H21 首都大学東京理工学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $\|u\|_H = 1$ となる任意の $u \in H$ に対し

$$\|Su\|_H^2 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} (u, e_i)_H e_{i+1} \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} (u, e_i)_H \overline{(u, e_j)_H} (e_{i+1}, e_{j+1})_H = \sum_{i=1}^{\infty} |(u, e_i)_H|^2 = 1$$

より $\|S\| = 1$ となる．

(2) $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|u\|_H^2 < \infty$ だから写像

$$U : H \to \ell^2 \qquad U\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

が定義される．上の評価より U が全射な等距離作用素である事が分かる．また $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ に対し

$$USU^{-1}\left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = US\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = U\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{n+1}\right) = U\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1} e_n\right) = \{x_{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$$

より $USU^{-1} = T$ となる．

(3) H_1 内の点列 $\{e_n\}_{n=1,2,\cdots}$ の任意の相異なる 2 点 e_m, e_n について $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ となるから，点列の像 $S(\{e_n\}_{n=1,2,\cdots}) = \{e_n\}_{n=2,3,\cdots}$ は収束部分列を持たないから $S(H_1)$ は相対コンパクトではない．

(4) 三角不等式より任意の $x \in H$ に対し

$$\|(S - cI)x\|_H \ge |\|Sx\|_H - \|cx\|_H| \ge |c|\|x\|_H - \|Sx\|_H \ge |c|\|x\|_H - \|S\|\|x\|_H = (|c| - 1)\|x\|_H$$

が成立．仮定より $|c| - 1 > 0$ だから $S - cI$ は単射であり，かつ $(S - cI)(H)$ を定義域とする有界な逆作用素 $(S - cI)^{-1}$ が存在する．

各 $e_n \in H$ について $u_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/c^{k+1}) e_{n+k}$ と置けば

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| -\frac{1}{c^{k+1}} \right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|c|^2} \right)^{k+1} = \frac{1}{|c|^2 - 1} < \infty$$

より $u_n \in H$ であり，Parseval の等式より $\|u_n\|_H = (|c|^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$．更に

$$(S - cI)(u_n) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c^{k+1}} e_{n+k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c^k} e_{n+k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k} e_{n+k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k} e_{n+k} + \frac{1}{c^0} e_n = e_n$$

となるから，$\{e_n\}_n$ が生成する部分空間 M は $(S - cI)(H)$ に含まれる．M は H で稠密だから $(S - cI)(H)$ 上の逆作用素 $(S - cI)^{-1}$ は H 上の有界作用素となる． □

《備考》 norm 空間 X から norm 空間 Y への有界線形作用素 $T : X \to Y$ について，T は単射であり，かつ TX を定義域とする逆作用素 T^{-1} は有界である事と

$$\|Tx\| \ge c\|x\| \qquad (x \in X)$$

となる定数 $c > 0$ が存在する事が同値となる． □

【問題】

(1) $C[0,1]$ を区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数全体とする．$C[0,1]$ 上のノルムを

$$\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

で定義する．$C[0,1]$ 上でバナッハ空間であることを示せ．

(2) $K(x,y)$ を区間 $[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数とする．作用素 $T : C[0,1] \ni f(x) \mapsto (Tf)(x) \in C[0,1]$ を

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \qquad x \in [0,1]$$

で定義する．T はコンパクト作用素である事を示せ．

(3) $C[0,1]$ 上の恒等作用素を I で表す．

$$\max\{|K(x,y)| \mid (x,y) \in [0,1]\times[0,1]\} < 1$$

ならば $I-T$ は $C[0,1]$ から $C[0,1]$ への全単射であることを示せ．

(H18 都立大学理工学研究科 数学専攻)

【解答】 $I=[0,1]$, $X=C(I)$ と置く．

(1) X が $\|\cdot\|$ に関し完備である事のみ示す． $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列だとすれば，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\|f_n-f_m\|<\varepsilon/4$ $(m,n\geq N_0)$ となる $N_0=N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ が存在する．任意の $t\in I$ に対し

$$|f_n(t)-f_m(t)| \leq \|f_n-f_m\| < \varepsilon/4 \qquad (\forall m,n\geq N_0) \tag{1}$$

より $\{f_n(t)\}_n$ は Cauchy 列となり，$\mathbb{R}$ の絶対値に関する完備性より，$\{f_n(t)\}_n$ の極限 $f(t)$ が存在．これより関数 f が定義される．不等式 (1) より

$$|f(t)-f_{N_0}(t)| \leq \varepsilon/4 \qquad (t\in I) \tag{2}$$

である．また f_{N_0} の一様連続性より $|f_{N_0}(t)-f_{N_0}(s)|<\varepsilon/4$ $(|t-s|<\delta)$ となる $\delta>0$ が存在し，$|t-s|<\delta$ となる $s,t\in I$ に対し

$$|f(t)-f(s)| \leq |f(t)-f_{N_0}(t)| + |f_{N_0}(t)-f_{N_0}(s)| + |f_{N_0}(s)-f(s)| < 3\varepsilon/4 < \varepsilon,$$

従って $f\in X$ である．また (2) より $\|f-f_{N_0}\|<\varepsilon/4$ だから，

$$\|f-f_n\| \leq \|f-f_{N_0}\| + \|f_{N_0}-f_n\| < \varepsilon/4+\varepsilon/4 < \varepsilon \qquad (n\geq N_0)$$

となり，従って関数列 $\{f_n\}$ は f に I 上一様収束する．よって X は $\|\cdot\|$ に関し完備である．

(2) Weierstrass の多項式近似定理より，連続関数 $K(x,y)$ に $I\times I$ 上で一様収束する 2 変数の多項式列 $p_n(x,y)$ $(n=0,1,\cdots)$ が存在する．$d_n=\max\{|K(x,y)-p_n(x,y)| \mid (x,y)\in I^2\}$ と置けば $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ となる．この列を用いて

$$T_nf(x) = \int_0^1 p_n(x,y)f(y)dy \qquad (x\in I)$$

とすれば $T_nf(x)$ は x の多項式だから，$T_n : X\ni f \mapsto T_nf \in X$ は X 上の退化作用素となる．$f\in X$ に関し

$$|Tf(x)-T_nf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)-p_n(x,y)||f(y)|dy \leq d_n\|f\|$$

より $\|(T-T_n)f\|\leq d_n\|f\|$ となるから X 上の有界線形作用素全体 $\mathscr{L}(X)$ 上の作用素 norm $\|\cdot\|$ に関し $\|T-T_n\|\leq d_n$ が成立．従って T は退化作用素列 T_n の極限となる．コンパクト作用素列の作用素 norm に関する極限は再びコンパクト作用素となるから，T はコンパクト作用素である．

(3) $L=\max\{|K(x,y)| \mid (x,y)\in I^2\}<1$ と置けば $|Tf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f(y)|dy \leq L\|f\|$ より $\|T\|\leq L<1$ となる．$S_n=\sum_{k=0}^{n} T^k$ と置けば $S_n\in(X)$ であり $m<n$ となる $n,m\in\mathbb{N}$ に対し

$$\|S_n-S_m\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|T\|^k = \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k - \sum_{k=0}^{m} \|T\|^k$$

より $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathscr{L}(X)$ の Cauchy 列となる．Banach 空間上の有界線形作用素全体は作用素 norm に関して完備だから $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限 $S\in\mathscr{L}(X)$ が存在する．$(I-T)S_n = I-T^{n+1}$ だから

$$\|I-(I-T)S\| \leq \|I-(I-T)S_n\| + \|(I-T)(S_n-S)\| = \|T\|^{n+1} + \|I-T\|\|S_n-S\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

従って $I=(I-T)S$ となる．同様に $S(I-T)=I$ が示されるから $I-T$ は全単射である． □

《備考》 X, Y を norm 空間とする．線形作用素 $T: X\to Y$ について

“X の任意の有界集合 A の像 TA は Y で相対 compact となる”

が成立するとき，T を **compact 作用素** という．距離空間の部分集合が相対 compact である事と相対点列 compact (即ち，その集合内の任意の点列は部分列を含む) である事と同値だから，上の条件は

“X の任意の有界点列 $\{x_n\}_n$ の像 $\{Tx_n\}_n$ は収束部分列を含む”

という条件と同値である．

(i) compact 作用素は有界である．

(実際，$T: X\to Y$ が comapct 作用素だとする．$TU_1^X(0)$ は相対 compact，特に全有界だから $TU\subset\bigcup_{i=1}^n U_1^Y(Tx_i)$ となる有限個の $x_1,\cdots,x_n\in U_1^X(0)$ が存在する．$M=\max\{\|Tx_i\| : i=1,\cdots,n\}$ と置く．$x\in U_1^X(0)$ に対し $Tx\in U_1^Y(Tx_i)$ となる x_i をとれば

$$\|Tx\|-\|Tx_i\|\leq\|Tx-Tx_i\|<1, \qquad \|Tx\|<\|Tx_i\|+1\leq M+1$$

より T は有界である．)

(ii) norm 空間上の退化作用素 (像が有限次元となる有界線形作用素) は compact 作用素である．

(実際，$A\subset X$ について $\|A\|\leq M \quad (M>0)$ だとする．このとき $\|Ta\|\leq\|T\|M \quad (a\in A)$ だから TA は TX 内の有界集合である．TX は有限次元だから閉包 $\overline{TA}$ は有界閉集合，従って TA は相対 comapct となる．)

(iii) compact 作用素の全体 $\mathscr{L}_c(X,Y)$ は有界線形作用素の空間 $\mathscr{L}(X,Y)$ の部分空間となる．

(実際，零作用素 O が compact 作用素である事は自明．また $T,S\in\mathscr{L}_c(X,Y)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ とする．X の有界列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について $\{Sx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\{Sx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を含み，その極限を y_1 とする．$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は再び X の有界列となるから，$\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は収束部分列 $\{Tx_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ を含み，その極限を y_2 とする．このとき $\{(\alpha S+\beta T)(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{(\alpha S+\beta T)(x_{n_{k_l}})\}_{l\in\mathbb{N}}$ は $\alpha y_1+\beta y_2$ に収束する．従って $\alpha S+\beta T\in\mathscr{L}_c(X,Y)$ となる．)

(iv) Y が Banach 空間のとき，$\mathscr{L}_c(X,Y)$ は $\mathscr{L}(X,Y)$ の閉部分空間となる．

(実際，$S\in\mathscr{L}(X,Y)$ が compact 作用素列 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限だとする．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を X の有界列とし，$\|x_n\|\leq M$ $(n\in\mathbb{N},\, M>0)$ だとする．この列に対し次の帰納的な手順で部分列 $\{x_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$，及び $y_m\in Y$ を定める：

(0) $\{x_n^{(0)}\}_{n\in\mathbb{N}}=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする．

(m) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{x_n^{(m-1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，$\{S_m x_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列となるような部分列 $\{x_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．また $\{S_m x_n^{(m)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を $y_m\in Y$ とする．

ここで $x^{(n)}=x_n^{(n)}$ とすると，$\{x^{(k)}\}_{k\geq n}$ は $\{x_n^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列だから $\lim_{k\to\infty} S_n x^{(k)} = y_n$ となる．

任意の $\varepsilon>0$ に対し $\|S_n-S\|<\frac{\varepsilon}{3M} \quad (n\geq n_0)$ となる $n_0\in\mathbb{N}$ をとる．この n_0 に対し $\|S_{n_0}x^{(k)}-S_{n_0}x^{(l)}\|<\frac{\varepsilon}{3M}$ $(k,l\geq n_1\geq n_0)$ となる $n_1\in\mathbb{N}$ をとる．このとき $k,l\geq n_1$ なる k,l に対し

$$\begin{aligned}\|Sx^{(k)}-Sx^{(l)}\| &\leq \|Sx^{(k)}-S_{n_0}x^{(k)}\|+\|S_{n_0}x^{(k)}-S_{n_0}x^{(l)}\|+\|S_{n_0}x^{(l)}-Sx^{(l)}\| \\ &\leq \|S-S_{n_0}\|\|x^{(k)}\|+\|S_{n_0}x^{(k)}-S_{n_0}x^{(l)}\|+\|S_{n_0}-S\|\|x^{(l)}\| < \frac{\varepsilon}{3M}M+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3M}M=\varepsilon\end{aligned}$$

が成立．従って $\{Sx^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y の Cauchy 列となる．Y は Banach 空間だから $\{Sx^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束する．故に S は compact 作用素である．)

Banach 空間の場合，(ii) と (iv) より退化作用素列の極限は compact 作用素となる．退化作用素列の近似は compact 作用素を扱う問題の常套手段の一つとなる (cf. H17 都立大) □

【問題】

$$\ell^2 = \left\{ \{u_n\}_{n=0}^{\infty}\ : \{u_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ は } \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \text{ をみたす複素数列} \right\}$$

と置く．ℓ^2 は内積

$$(u,v)_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v}_n, \qquad u = \{u_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2, \qquad v = \{v_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$$

に関するヒルベルト空間である．$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を有界な複素数列とする．ℓ^2 上の線形作用素 T を次で定義する．

$$T : \ell^2 \ni \{u_n\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{a_n u_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2.$$

T の作用素ノルムを $\|T\|$ で表す．以下の (1) (2) (3) が成り立つ事を示せ．

(1) $\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$

(2) T はコンパクト作用素 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\Rightarrow$ T はコンパクト作用素

(H17 都立大学理工学研究科 数学専攻)

【解答】 $e_n = \{\delta_{mn}\}_{m \in \mathbb{N}}$ とすれば $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ は完全正規直交系であり，任意の $u \in \ell^2$ は $u = \sum_{i=0}^{n} (u, e_i) e_i$ と表される．

(1) $\|u\|_{\ell^2} \leq 1$ となる $u \in \ell^2$ に対し

$$\|Tu\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n u_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m|^2 |u_n|^2 = \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2$$

$$\therefore \quad \|Tu\|_{\ell^2} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m| \|u\|_{\ell^2}, \qquad \|T\| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} |a_m|$$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ だと仮定する．このとき $|a_{n_k}| \geq M$ $(k \in \mathbb{N})$ となる $M > 0$ と増加列 $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在する．任意の k, l に対し

$$\|Te_{n_k} - Te_{n_l}\|_{\ell^2} = \|a_{n_k} e_{n_k} - a_{n_l} e_{n_l}\|_{\ell^2} = \sqrt{|a_{n_k}|^2 + |a_{n_l}|^2} \geq \sqrt{2} M > 0$$

となるから $\{Te_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は収束部分列を持たない．しかし T のコンパクト性から有界点列 $\{e_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ に対し $\{Te_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が収束部分列を持つ事に反する．

(3) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_n : \ell^2 \to \ell^2, \qquad T_n(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i$$

とすれば T_n は退化作用素となる．任意の $u \in \ell^2$ に対し Bessel の不等式より

$$\|Tu - T_n u\| = \left\| \sum_{j>n} a_j (u, e_j) e_j \right\| \leq \sum_{j>n} |a_j| |(u, e_j)| \leq \sup_{j>n} |a_j| \sum_{j=0}^{\infty} |(u, e_j)| \leq \sup_{j>n} |a_j| \|u\|_{\ell^2}$$

となるから，仮定より $\sup_{j>n} |a_j| \to 0$，$\|Tu - T_n u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ となる．任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\|T - T_n\| - \frac{\varepsilon}{2} < \|Tu - T_n u\| \leq \|T - T_n\|, \qquad \|u\| = 1$$

となる $u \in \ell_n$ をとり，$\|Tu - T_n u\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(n \geq N)$ となる N をとれば，$n \geq N$ に対し $\|T - T_n\| - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$，$\|T - T_n\| < \varepsilon$ となる．T は退化作用素列 $\{T_n\}_n$ の極限だから T はコンパクトである． □

【問題】 $\mathcal{H}$ を実 Hilbert 空間とする．$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ の内積とし，$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ を $\mathcal{H}$ のノルムとする．

(1) B を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素とし，K を $\mathcal{H}$ 上のコンパクト線形作用素とする．このとき，作用素 BK, KB はともにコンパクト線形作用素であることを示せ．

(2) F は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素で，F の値域 Ran F は有限次元であるとする．$N=\dim\mathrm{Ran}\,F$ とおく．このとき F があるベクトル $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N\in\mathcal{H}$ と $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_N\in\mathcal{H}$ を用いて

$$Fu=\sum_{i=1}^{N}(u,\psi_i)_{\mathcal{H}}\phi_i \qquad u\in\mathcal{H}$$

と表されることを示せ．

(3) F は (2) のとおりとする．$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の列で，0 に強収束するものとする ： すなわち，任意の $u\in\mathcal{H}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\|B_nu\|_{\mathcal{H}}=0.$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\|B_nF\|_{B(\mathcal{H})}=0.$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\|\cdot\|_{B(\mathcal{H})}$ は作用素ノルムとする．

(H16 東京都立大学 理学研究科 数学専攻)

【解答】 (1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{H}$ の有界点列とし，$\|x_n\|_{\mathcal{H}}\le M\ \ (n=1,2,\cdots)$ となる $M>0$ を取る．

仮定より $\{Kx_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列 $\{Kx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を持ち，この極限を x_0 とすれば

$$\|BKx_{n_k}-Bx_0\|_{\mathcal{H}}\le\|B\|_{B(\mathcal{H})}\|Kx_{n_k}-x_0\|_{\mathcal{H}}$$

より点列 $\{BKx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は Bx_0 に収束．即ち $\{BKx_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列を持つから BK はコンパクトである．一方，

$$\|Bx_n\|_{\mathcal{H}}\le\|B\|_{B(\mathcal{H})}\|x_n\|_{\mathcal{H}}\le\|B\|_{B(\mathcal{H})}M \qquad (\forall n)$$

より $\{Bx_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界．K はコンパクトだから $\{KBx_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列を持つ．よって KB もコンパクトである．

(2) Ran F の任意の正規直交基底 $\{\phi_1,\cdots,\phi_N\}$ をとるとき，線形汎関数 f_i を $f_i(u)=\langle Fu,\phi_i\rangle$ により定めれば $Fu=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}f_i(u)\phi_i$ であり，Schwarz の不等式と F の有界性より

$$|f_i(u)|\le\|Fu\|_{\mathcal{H}}\|\phi_i\|_{\mathcal{H}}\le\|F\|_{B(\mathcal{H})}\|u\|_{\mathcal{H}} \qquad (u\in\mathcal{H})$$

だから f_i は有界となる． Riesz の表現定理より $f_i(u)=(u,\psi_i)_{\mathcal{H}}\ \ (\forall u\in\mathcal{H})$ となる $\psi_i\in\mathcal{H}$ が一意的に存在するから $Fu=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(u,\psi_i)_{\mathcal{H}}\phi_i\ \ (\forall u\in\mathcal{H})$ となる．

(3) $U=\{u\in\mathcal{H}:\|u\|_{\mathcal{H}}\le1\}$ と置く．Schwarz の不等式より任意の $u\in\mathcal{H}$ に対し

$$\|Fu\|\le\sum_{i=1}^{N}|(u,\psi_i)_{\mathcal{H}}|\|\phi_i\|_{\mathcal{H}}\le\sum_{i=1}^{N}\|u\|_{\mathcal{H}}\|\psi_i\|_{\mathcal{H}}|\|\phi_i\|_{\mathcal{H}}=M\|u\|_{\mathcal{H}} \qquad (M:=\sum_{i=1}^{N}\|\psi_i\|_{\mathcal{H}}|\|\phi_i\|_{\mathcal{H}})$$

より $FU\subset\{u\in\mathrm{Ran}\,F:\|u\|\le M\}$ となる．右辺は有限次元線形空間内の有界閉集合だから FU は相対コンパクト，従って F はコンパクト作用素となる．

今，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|B_nF\|_{B(\mathcal{H})}\ne0$ だとすると $\|B_{n_k}F\|_{B(\mathcal{H})}\ge\varepsilon$ となる $\varepsilon>0$ 及び増加列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する．更に各 n_k に対し

$$\|B_{n_k}F\|_{B(\mathcal{H})}-\frac{\varepsilon}{2}<\|B_{n_k}Fu_{n_k}\|_{\mathcal{H}}\le\|B_{n_k}F\|_{B(\mathcal{H})}, \qquad \|u_{n_k}\|_{\mathcal{H}}=1$$

となる $u_{n_k}\in\mathcal{H}$ をとれば $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界集合だから $\displaystyle\lim_{l\to\infty}\|Fu_{n_{k_l}}-v\|_{\mathcal{H}}=0$ となる $\{n_k\}_k$ の部分列 $\{n_{k_l}\}_l$ と $v\in\mathcal{H}$ が存在する．u_{n_k} のとり方より $\|B_{n_{k_l}}Fu_{n_{k_l}}\|_{\mathcal{H}}\ge\frac{\varepsilon}{2}$ だが，

$$\|B_{n_{k_l}}Fu_{n_{k_l}}\|_{\mathcal{H}}\le\|B_{n_{k_l}}v\|_{\mathcal{H}}+\|B_{n_{k_l}}Fu_{n_{k_l}}-B_{n_{k_l}}v\|_{\mathcal{H}}\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}0$$

となり矛盾する．故に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|B_{n_{k_l}}F\|_{B(\mathcal{H})}=0$ となる． □