

【問題】 \mathbb{R} 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次の漸化式で定める:

$$f_0(t) = 1, \quad f_n(t) = 1 + \int_0^t f_{n-1}(s) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

以下の問に答えよ.

- (i) 各整数 $n \geq 0$ に対し, $f_n(t)$ を具体的に求めよ.
- (ii) \mathbb{R} 上のある関数 f が存在し, 関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に \mathbb{R} 上で広義一様収束する事を示せ.
- (iii) (2) の関数 f が次の初期値問題の解である事を示せ.

$$f'(t) = f(t), \quad f(0) = 1. \quad (2)$$

(H31 首都大学東京理工学研究科数理情報科学)

【解答】 (i) $f_1(t) = 1 + t$, $f_2(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$, $f_3(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3$ となり, これより $n = 1, 2, \dots$ に対し

$$f_n(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n \quad (3)$$

という形になると推測される. n までの成立を仮定すると

$$f_{n+1}(t) = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_0^t s^k ds = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} t^k$$

だから, 任意の n に対し (3) が成立し, 故に $f_n(t)$ は (3) で与えられる.

- (ii) $t \in \mathbb{R}$ を固定するとき, $m < n$ となる m, n に対し

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |f_{k+1}(t) - f_k(t)| = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!} \leq e^{|t|} - \sum_{k=0}^m \frac{|t|^k}{k!}$$

が成立. この不等式より各点 t について $\{f_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ は Cauchy 列となる事が分かり, 故に $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ が存在する. 次に M を任意の正数とする. $t \in [-M, M]$ 及び $m < n$ となる m, n に対し

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} \leq e^M - \sum_{k=0}^m \frac{M^k}{k!}$$

となるから $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $[-M, M]$ 上で f に一様収束する事が分かる. M は任意だったから $\{f_n\}$ は f に広義一様収束する.

- (iii) 任意の $M > 0$ をとり, $[-M, M]$ 上の連続関数 $g(t)$ に対し

$$\|g\|_M = \sup_{t \in [-M, M]} |g(t)|$$

と置く事にする. (1) より $t \in [-M, M]$ 及び $n > 0$ に対し

$$\begin{aligned} |f(t) - 1 - \int_0^t f(s) ds| &= |f(t) - 1 - (f_n(t) - 1 - \int_0^t f_{n-1}(s) ds) - \int_0^t f(s) ds| \\ &\leq |f(t) - f_n(t)| + \left| \int_0^t |f_{n-1}(s) - f(s)| ds \right| \leq \|f - f_n\|_M + M \|f_{n-1} - f\|_M. \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ とすれば最右辺 $\rightarrow 0$ となる. M は任意だから, f は \mathbb{R} 上

$$f(t) = 1 + \int_0^t f(s) ds, \quad \text{従って } f'(t) = f(t) \text{ かつ } f(0) = 1$$

を満たす. □

【問題】 k を次数の定数とする。次の微分方程式の実数解 $u(t)$ を考える：

$$\ddot{u} + 2\dot{u} + ku = f.$$

以下の問に答えよ。

- (1) $k \leq 1$ かつ f が恒等的に 0 のとき、一般解 u を求めよ。
- (2) $k \leq 1$ かつ $f(t) = t$ のとき、一般解 u を求めよ。
- (3) ω を正の実数とする。 $k = \omega^2 + 1$ かつ f が恒等的に 0 のときの解で、 $u(0) = 0$ かつ $\dot{u}(0) = \omega$ を満たすものを求めよ。
- (4) (3) の解を $u(\omega, t)$ とする。極限 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} u(\omega, t) dt$ の値を求めよ。

(H29 首都大学東京理工学研究科数理情報科学)

【解答】 (1) 方程式は齊次定数係数線形常微分方程式だから、その解は特性根により決定される。 $k < 1$ の場合、2 つ異なる特性根 $-1 \pm \sqrt{1-k}$ を持つから、一般解は $u(t) = c_1 e^{-t+\sqrt{1-k}t} + c_2 e^{-t-\sqrt{1-k}t}$ (c_1, c_2 は任意定数) となる。一方、 $k = 1$ の場合、特性根は -1 (重根) となるから、一般解は $u(t) = e^{-t}(c_1 t + c_2)$ (c_1, c_2 は任意定数) となる。

(2) $k \neq 0$ のとき、 $u = at + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$) という特殊解があると仮定し、与式に代入すれば

$$2a + k(at + b) = t, \quad ka = 1, \quad 2a + kb = 0, \quad a = \frac{1}{k}, \quad b = -\frac{2}{k^2}.$$

これより $u = \frac{1}{k}t - \frac{2}{k^2}$ という特殊解を持つ事が分かる。一方、 $k = 0$ のとき、 $u = at^2 + bt + c$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$) という特殊解があると仮定し、与式に代入すれば

$$2a + 2(2at + b) = t, \quad 4a = 1, \quad 2a + 2b = 0, \quad a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

これより $u = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4}$ という特殊解を持つ事が分かる。(1) の結果と併せて一般解は次のようになる (c_1, c_2 は任意定数とする):

$$u(t) = \begin{cases} t - 2 + e^{-t}(c_1 t + c_2) & (k = 1) \\ \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} + c_1 + c_2 e^{-2t} & (k = 0) \\ \frac{1}{k}t - \frac{2}{k^2} + c_1 e^{-t+\sqrt{1-k}t} + c_2 e^{-t-\sqrt{1-k}t} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(3) この場合の特性根は $-1 \pm \omega i$ だから一般解は $u = e^{-t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$ により与えられる。初期条件より $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ 、従ってこの初期値問題の解は $u = e^{-t} \sin \omega t$ となる。

(4) $I = \int u(t) dt$ に対し部分積分を 2 回適用すれば

$$I = -e^{-t} \sin \omega t + \omega \int e^{-t} \cos \omega t dt = -e^{-t} \sin \omega t + \omega(-e^{-t} \cos \omega t - \omega I).$$

これより $I = -\frac{e^{-t}}{\omega^2 + 1}(\sin \omega t + \omega \cos \omega t)$.

$$\therefore \int_0^{\infty} u(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-t}}{\omega^2 + 1}(\sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right]_0^T = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-T}}{\omega^2 + 1}(\sin \omega T + \omega \cos \omega T) + \frac{1}{\omega^2 + 1} = \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

$$\therefore \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} u(\omega, t) dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} = \underline{0}.$$

□

【問題】 関数 $u(x, t)$ は $u \in C^2([0, 1] \times [0, +\infty))$ で、次の方程式と境界条件を満たす解とする。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (0 < x < 1, t > 0) \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (t \geq 0) \quad (2)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $E(t) = \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \right) dx$ と置くと、 $t > 0$ に対して $E'(t) \leq 0$ となる事を示せ。

(2) $u(x, t) = T(t)X(x)$ の形の解で、 $u(x, t) \not\equiv 0$ なるものを全て求めよ。

(H24 首都大学東京 理工学研究科)

【解答】 (1) 条件 (2) より $u_t(0, t) = u_t(1, t) = 0$ ($t > 0$) となる事に注意する。これと (1)、及び部分積分より

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \int_0^1 (u_{tt}u_t + u_{xt}u_x) dx \\ &= 2 \int_0^1 (u_{xx} - 2u_t)u_t dx + 2[u_tu_x]_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 u_tu_{xx} dx \\ &= 2 \int_0^1 u_{xx}u_t dx - 4 \int_0^1 u_t^2 dx - 2 \int_0^1 u_tu_{xx} dx = -4 \int_0^1 u_t^2 dx. \quad \therefore E'(t) \leq 0. \end{aligned}$$

(2) $u = TX$ として (1) に代入すれば

$$\ddot{T}X + 2\dot{T}X = TX'', \quad \frac{\ddot{T} + 2\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X}$$

第 2 式の両辺は定数であり、これを $-c$ と置けば

$$\ddot{T} + 2\dot{T} + cT = 0, \quad X'' + cX = 0 \quad (3)$$

(3) の後者より $X = c_1 \cos \sqrt{c}x + c_2 \sin \sqrt{c}x$ (c_1, c_2 は任意定数)。(2) より $X(0) = X(1) = 0$ 。これより $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ かつ $c = n^2\pi^2$ ($n = 1, 2, \dots$) となる。

(3) の前者は定数係数齊次 2 階線形微分方程式。この方程式の特性方程式は $\omega^2 + 2\omega + c = (\omega + 1 - i\sqrt{c-1})(\omega + 1 + i\sqrt{c-1}) = 0$ だから、上の c の値と併せて $T = e^{-t}(c_1 \cos \sqrt{c-1}t + c_2 \sin \sqrt{c-1}t)$ (c_1, c_2 は任意定数)。

以上より $u = XT$ という形の解は次で与えられる：

$$u = \sin(n\pi x)e^{-t}(c_1 \cos \sqrt{n^2\pi^2 - 1}t + c_2 \sin \sqrt{n^2\pi^2 - 1}t) \quad (n = 1, 2, \dots, c_1, c_2 \text{ は任意定数})$$

□

【問題】 定数 c および \mathbb{R} 上の C^2 級関数 $U(z)$ に対して $u(x, t) = U(x - ct)$ とおくと、 $u(x, t)$ は

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < t < \infty)$$

をみたすとする。このとき次の間に答えよ。

- (1) $U(z)$ のみたすべき 2 階の常微分方程式を求めよ。
- (2) $U(z)$ が $z \rightarrow -\infty$ において $U(z) \rightarrow 2$, $U'(z) \rightarrow 0$ であり, $z \rightarrow \infty$ において $U(z) \rightarrow 1$, $U'(z) \rightarrow 0$ であるという境界条件を満たすとする。このとき定数 c の値, および $U(z)$ が満たすべき 1 階の常微分方程式を求めよ。
- (3) 初期条件 $U(0) = \frac{3}{2}$ のもとで (2) の 1 階の常微分方程式を満たす $U(z)$ を求めよ。

(H22 首都大学東京 理工学研究科)

【解答】 (1) 連鎖律より

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -cU'(x - ct) + UU'(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = U''(x - ct).$$

これより U は微分方程式 $U'' = U'(U - c)$ を満たす。

(2) $V = U - c$ と置けば (1) より V は $V'' = V'V$ を満たし,

$$2V'' = 2V'V = (V^2)', \quad V' = \frac{1}{2}V^2 + C_1, \quad U' = \frac{1}{2}(U - c)^2 + C_1 \quad (C_1 \text{ は定数})$$

ここで $z \rightarrow \infty$ とすれば $0 = \frac{1}{2}(1 - c)^2 + C_1$, $z \rightarrow -\infty$ とすれば $0 = \frac{1}{2}(2 - c)^2 + C_1$ だから, c および U の満たす微分方程式は次に通り:

$$c = \frac{3}{2}, \quad U' = \frac{1}{2} \left(U - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

(3) (2) で得られた 1 階の常微分方程式は変数分離形だから,

$$\int \frac{dU}{(U - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2} \int dz + C \quad (C \text{ は定数})$$

$$\log \left| \frac{U - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{U - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{2}z + C \quad \therefore U = \frac{2 - Ce^{\frac{1}{2}z}}{1 - Ce^{\frac{1}{2}z}} \quad (\pm e^C \text{ を改めて } C \text{ と置く})$$

初期条件より $C = -1$ となるから $U(z) = \frac{2 + e^{\frac{1}{2}z}}{1 + e^{\frac{1}{2}z}}$ である。 □

【問題】 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $L > 0$ とし, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. 任意の $s, y, z \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(s, y) - f(s, z)| \leq L|y - z| \quad (L)$$

が成り立つと仮定する. 初期値問題

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) & (t \in \mathbb{R}) \\ x(a) = b \end{cases} \quad (I)$$

について考える. 以下の問に答えよ.

(i) \mathbb{R} 上の関数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ を漸化式

$$\begin{cases} x_0(t) = b, \\ x_n(t) = b + \int_a^t f(s, x_{n-1}(s)) ds \quad (n \geq 1) \end{cases} \quad (1)$$

で定義する. 関数列 $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ が \mathbb{R} 上で広義一様収束する事を示せ.

(ii) $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \quad (2)$$

と置く. $x(t)$ が初期値問題 (I) の解である事を示せ.

(iii) 初期値問題 (I) の解の一意性を示せ.

(H20 首都大学東京 理工学研究科)

【解答】 (i) 任意の $R > 0$ を固定し $J_R = [a - R, a + R]$ とする. J_R 上の連続関数 φ に対し $\|\varphi\|_R = \max\{|\varphi(t)| : t \in J_R\}$ と置く. 特に $M_R = \|f(\cdot, b)\|_R$ と置く. このとき n に関する帰納法により

$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \frac{M_R L^{n-1}}{n!} |t - a|^n$$

となる事を示す.

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \left| \int_a^t |f(s, b)| ds \right| \leq M_R |t - a|$$

より $n = 1$ のときには成立. $n > 1$ とし, $n - 1$ までの成立を仮定すると

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| &\leq \left| \int_a^t |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, x_{n-2}(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_a^t |x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)| ds \right| \\ &\leq L \frac{M_R L^{n-2}}{(n-1)!} \left| \int_a^t |s - a|^{n-1} ds \right| \leq \frac{M_R L^{n-1}}{n!} |t - a|^n. \end{aligned}$$

従って任意の n に対しこの不等式が成立する. これより $m \leq n$ となる任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \frac{M_R}{L} \sum_{k=m+1}^n \frac{L^k}{k!} |t - a|^k \leq \frac{M_R}{L} (e^{LR} - \sum_{k=0}^m \frac{L^k R^k}{k!})$$

$$\therefore \|x_n - x_m\|_R \leq \frac{M_R}{L} (e^{LR} - \sum_{k=0}^m \frac{L^k R^k}{k!})$$

だから $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ は J_R 上一様収束 $\text{norm}\|\cdot\|_R$ に関する Cauchy 列, 故に収束列となる. R は任意だから, この関数列は広義一様収束する.

(ii) 任意の $R > 0$ を固定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|x - x_n\| < \varepsilon/(1 + LR)$ ($n \geq N$) となる $N \in \mathbb{N}$ をとるとき, $t \in J_R$ に対し

$$\begin{aligned} |x(t) - b - \int_a^t f(s, x(s)) ds| &\leq |x(t) - x_{N+1}(t)| + \left| \int_a^t |f(s, x_N(s)) - f(s, x(s))| ds \right| \\ &\leq |x(t) - x_{N+1}(t)| + L \left| \int_a^t |x_N(s) - x(s)| ds \right| \\ &\leq \|x - x_{N+1}\| + L \|x_N - x\| |t - a| \leq \frac{\varepsilon}{1 + LR} + \frac{LR\varepsilon}{1 + LR} = \varepsilon \end{aligned}$$

となる。 R は任意だから、従って \mathbb{R} 上で等式

$$x(t) = b + \int_a^t f(s, x(s)) ds \quad (3)$$

が成立。この等式の成立は初期値問題 (I) と同値だから、 x は初期値問題 (I) の解である。

(iii) 任意の $R > 0$ を固定する。 J_R 上で (I) の解 y が与えられたとする。 $N_R = \sup\{|f(s, y(s))| : s \in J_R\}$ とすると、任意の $t \in J_R$ 及び n に対し

$$\|x_n - y\|_R \leq \frac{N_R L^n R^n}{n!} \quad (4)$$

が成立。実際、 $n = 0$ のとき

$$|x_0(t) - y(t)| \leq \left| \int_a^t |f(s, y(s))| ds \right| \leq N_R |t - a|$$

より $\|x_0 - y\|_R \leq N_R R$ が成立。次に $n > 0$ のとき $n - 1$ までの成立を仮定すれば

$$|x_n(t) - y(t)| \leq \left| \int_a^t |f(s, x_{n-1}(s)) - f(s, y(s))| ds \right| \leq L \frac{N_R L^{n-1}}{(n-1)!} \left| \int_a^t |s - a|^{n-1} ds \right| = \frac{N_R L^n}{n!} |t - a|^n$$

となり、これより不等式 (4) が成立する。(4) で $n \rightarrow \infty$ とすれば $x = y$ となる。 R は任意だから、 \mathbb{R} 上で初期値問題 (I) の解は一意的となる。 \square