【問題】 (1) 微分方程式 $y'''' + y'' = 0$ の一般解を求めよ．
(2) 微分方程式 $y'''' + y'' = 6x$ の特殊解を求めよ．

(H13 東京農工大 機械システム工学・電子情報工学)

【解答】 (1) 特性方程式 $\omega^4 + \omega^2 = 0$ の解は $\omega = 0$ (重複度 2), $\pm\sqrt{-1}$ だから一般解は

$$\underline{y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x} \quad (C_1, \cdots, C_4 \text{ は任意定数})$$

(2) 方程式の形から $y = x^2(Ax + B)$ $(A, B$ は定数$)$ という形の特殊解を持つ．これを与式に代入して

$$y'''' + y'' = 6Ax + 2B = 6x, \qquad \therefore \quad A = 1,\ B = 0.$$

従って $\underline{y = x^3}$ という特殊解を持つ． □

〈備考〉 一般に定数係数線形常微分方程式 $P(D)y = F(x)$ $(P(t)$ は定数係数多項式，$F(x)$ は r 次多項式$)$ について，$P(t) = t^p Q(t)$ $(Q(0) \neq 0)$ となれば $y = x^p G(x)$ $(G(x)$ は r 次多項式$)$ という形の特殊解を持つ． □

【問題】 (1) 微分方程式 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ の一般解を求めよ．
(2) 微分方程式 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 3e^{2x}$ の一般解を求めよ．

(H12 東京農工大 機械システム工学・電子情報工学)

【解答】 (1) 特性方程式 $\omega^3 - 2\omega^2 - \omega + 2 = 0$ の解が $\omega = \pm 1, 2$ だから微分方程式の一般解は $\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}}$ $(C_1, C_2, C_3$ は任意定数$)$

(2) 方程式の形より $y = Axe^{2x}$ という特殊解があると予想される．これを与式に代入して

$$\begin{aligned} & y''' - 2y'' - y' + 2y \\ &= (8Ax + 12A)e^{2x} - 2(4Ax + 4A)e^{2x} - (2Ax + A)e^{2x} + 2Axe^{2x} \\ &= 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \end{aligned} \qquad \therefore \ A = 1$$

したがって $y = xe^{2x}$ という特殊解を得る．これと (1) の結果を合わせれば (2) の一般解は

$$\underline{y = xe^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数})$$

□