【問題】 [1] 熱いコーヒーを外気にさらしておくと，コーヒーの温度は次第に下がっていく．この現象を次のように考えよう．

1) 時間 t でのコーヒーの温度を $T(t)$，外気の温度は常に一定で $T_E > 0$ であるとする．コーヒーの温度は，コーヒーの温度と外気の温度との差に比例する速度で下がっていくものとして，$T(t)$ が満たす微分方程式を $T(t), T_E$ および適当な比例定数を用いて書け．
2) 入れたてのコーヒーの温度を $T(0) = T_0 > T_E$ として $T(t)$ を t の関数で表せ．
3) 前問 2) で求めた $T(t)$ を t の関数として図示せよ．

[2] 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = f(x)$$

について考えよう．ここで y は x の一変数関数である．以下のそれぞれの $f(x)$ の場合について，この微分方程式の一般解を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

1) $f(x) = 0$.
2) $f(x) = 3e^{2x}$.
3) $f(x) = e^x$.

[3] 時間 t を独立変数とする 2 つの未知関数 $x(t)$, $y(t)$ についての連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = x - x^3 \qquad (1)$$

を考えよう．

1) 一般に x-y 平面上の点 $(x(t), y(t))$ は連立微分方程式 (1) に従って時間と共に動くが，時間が経過しても移動しない点を不動点と呼ぶ事にする．この連立微分方程式 (1) の不動点を全て求めよ．
2) 前問 1) で求めた不動点のうち，x 座標が正のものを (x^*, y^*) とする．この不動点の近傍での点 $(x(t), y(t))$ の振る舞いを考えよう．そのために

$$x(t) = x^* + u(t), \qquad y(t) = y^* + v(t)$$

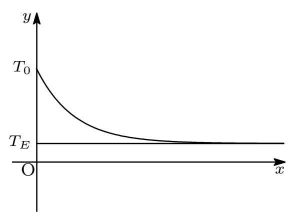
のように $u(t), v(t)$ を導入する．ただし $|u(t)|, |v(t)| \ll 1$ である．連立微分方程式 (1) を線形近似して，$u(t), v(t)$ が満たす連立微分方程式を求めよ．
3) $u(t), v(t)$ を任意定数を含む t の関数として求めよ．
4) 不動点 (x^*, y^*) の近傍での点 $(x(t), y(t))$ の軌道はどのような形になるか，数式を用いて説明せよ．

(H29 名古屋大学大学院情報科学研究科複雑系科学専攻)

【解答】 [1] 1) 温度の速度と温度差の比例定数を $M\ (>0)$ だとすれば，温度の満たす微分方程式は $dT/dt = -M(T - T_E)$ となる．

2) 1) の微分方程式を解いて $T - T_E = C_1 e^{-Mt}$ (C_1 は定数).
$T(0) = T_0 - T_E = C_1$ だから，$T = T_E + (T_0 - T_E)e^{-Mt}$.

3) 2) の解のグラフは右図の通り．



[2] 1) $f(x) = 0$ のときは $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数)

2) 方程式の形より $y = Me^{2x}$ という形の特殊解が存在する事が分かる．これを与式に代入して

$$y'' - y = (4M - M)e^{2x} = 3e^{2x} \qquad \therefore\ M = 1$$

よって $y = e^{2x}$ は特殊解であり，$y = e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数) が一般解となる．

3) 方程式の形より $y = Axe^x$ という形の特殊解が存在する事が分かる．これを与式に代入して

$$y'' - y = A(x+2)e^x - Axe^x = e^x \qquad 2A = 1 \qquad \therefore\ A = 1/2$$

よって $y = \frac{1}{2}xe^x$ は特殊解であり，$y = \frac{1}{2}xe^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ (C_1, C_2 は任意定数) が一般解となる．

[3] $\dot{}$ により t に関する微分を表す．

1) 時間的な変化が無い $\Leftrightarrow$ $dx/dt = dy/dt = 0$ より，(x, y) は不動点 $\Leftrightarrow$ $y = x - x^3 = 0$ を満たす点 $\Leftrightarrow$ $(x, y) = (0, 0)$, または $(\pm 1, 0)$.

2) $x - x^3 = -2u - 3u^2 - u^3$, $y = v$ より (1) の線形近似は $\dot{u}(t) = v$, $\dot{v}(t) = -2u$.

3) $\ddot{u} = \dot{v} = -2u$ より $u = C_1 \sin \sqrt{2}t + C_2 \cos \sqrt{2}t$, $v = \dot{u} = C_1\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - C_2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ (C_1, C_2 は任意定数).
4) $|u|, |v| \ll 1$ のとき,

$$\frac{d}{dt}(2u^2 + v^2) = 4u\dot{u} + 2v\dot{v} = 4uv - 4uv = 0$$

より $(u(t), v(t))$ は $2u^2 + v^2 = c^2$ ($c > 0$ は定数) という関係式を満たす. これより不動点 (x^*, y^*) の近傍での解 $(x(t), y(t))$ は楕円 $2(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 = c^2$ の付近を移動する事を意味する. $\square$

【問題】 $P(z) = z^2 + az + b$ を実係数の 2 次式とし，$D = \dfrac{d}{dt}$ を $\mathbb{R}$ 上の関数に作用する微分とするとき，$P(D)u = \dfrac{d^2u}{dt^2} + a\dfrac{du}{dt} + bu$ によって，$\mathbb{R}$ 上の関数に作用する $P(D)$ という 2 階の常微分作用素を定義する．今，実係数の 2 次方程式 $P(z) = 0$ は重根 $t = \lambda$ を持つと仮定する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $e^{\lambda t}$ は微分方程式 $P(D)u = 0$ の 1 つの解である事を示せ．また $u(t)$ を微分方程式 $P(D)u = 0$ の任意の解とすると，関数 $v(t) = e^{-\lambda t}u(t)$ は t の高々 1 次式である事を示せ.
(2) 微分方程式 $P(D)u = 0$ の解空間 V はベクトル空間である事を示し，その基底を一組求めよ．
(3) 微分方程式 $P(D)u = 0$ の全ての解が $0 \leq t < \infty$ のとき有界に留まるとする．このとき $a > 0$ である事を示せ.

(H19 名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

【解答】 (1) $De^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ より $P(D)e^{\lambda t} = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t} = 0$ より $e^{\lambda t}$ は解となる．

任意の解 u に対し $v = e^{-\lambda t}u$ とするとき，Leibnitz の法則より

$$P(D)(e^{\lambda t}v) = P(D)u = 0$$

$$\begin{aligned}P(D)(e^{\lambda t}v) =& D^2(e^{\lambda t})v + 2D(e^{\lambda t})Dv + e^{\lambda t}D^2v + a(D(e^{\lambda t})v + e^{\lambda t}Dv) + be^{\lambda t}v \\ =& P(\lambda)e^{\lambda t}v + e^{\lambda t}D^2v + (2\lambda + a)e^{\lambda t}Dv = e^{\lambda t}\{D^2v + (2\lambda + a)Dv\}\end{aligned}$$

だから $\{D^2 + (2\lambda + a)D\}v = 0$ が成り立つ．λ は $P(z)$ の重根，従って解と係数の関係より $a = -2\lambda$ だから $D^2v = 0$ となる．よって v は高々 1 次式，即ち $t = C_1 + C_2t$ $(C_1, C_2$ は定数) と表される．

(2) $u = 0$ が $P(D)u = 0$ の解である事は自明．また $u_1, u_2 \in V$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ に対し

$$P(D)(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2) = \alpha_1P(D)u_1 + \alpha_2P(D)u_2 = \alpha_1 0 + \alpha_2 0 = 0$$

より $\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 \in V$ となる．よって V は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数全体が作る線形空間の部分空間，従って V は $\mathbb{R}$ 上の線形空間である．(1) の結果より任意の解は $u = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}$ と表される．$te^{\lambda}t$ は $P(D)u = 0$ の解であり，$C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t} = 0$ だとすると，$C_1 + C_2t = 0$ $(\forall\, t)$ より $C_1 = C_2 = 0$．従って $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ は V の基底となる．

(3) $\lambda \geq 0$ だとすると解 $te^{\lambda t}$ は $0 \leq t < \infty$ で有界ではなくなる．一方，$\lambda < 0$ ならば $te^{\lambda t} \leq -1/\lambda e$ $(0 \leq t < \infty)$ だから，任意の C_1, C_2 に対し

$$|C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}| \leq |C_1|e^{\lambda t} + |C_2|te^{\lambda t} \leq |C_1| + |C_2|\left(-\frac{1}{\lambda e}\right) \qquad (0 \leq t < \infty)$$

が成立．よって $P(D)u = 0$ の任意の解は有界となる．

以上より $0 \leq t < \infty$ で全ての解が有界となるのは $\lambda < 0$ の場合のみ．$a = -2\lambda$ だから $a > 0$ となる． □