【問題】　$A(x)$ は n 次正方行列で，各成分が x について開区間 (a,b) 上で連続であるとする．$Y(x)$ は n 次正方行列で，開区間 (a,b) 上で

$$\frac{dY(x)}{dx} = A(x)Y(x) \tag{E$_0$}$$

を満たし，或る $x_0 \in (a,b)$ について $Y(x_0) = I$ が成り立つものとする．ただし I は n 次の単位行列である．

(i)

$$\frac{d}{dx}\det Y(x) = (\mathrm{tr}A(x))\det Y(x) \tag{E$_1$}$$

が成り立つ事を示し, 任意の $x \in (a,b)$ に対して $\det Y(x) \neq 0$ である事を示せ.

(ii)　M_0 を $n \times n$ 定数行列とし，$M(x) = Y(x)M_0Y(x)^{-1}$ と置く．このとき $M(x)$ は

$$\frac{dM(x)}{dx} = A(x)M(x) - M(x)A(x) \tag{E$_2$}$$

を満たす事を示せ.

(iii)　上の (E_2) を $M(x)$ に対する微分方程式と見做す．$N(x)$ を (E_2) の解とすると，勝手な $x_1, x_2 \in (a,b)$ に対し $N(x_1)$ と $N(x_2)$ とは相似である事と示せ.

(H17 九州大数理学府)

【解答】　$'$ により x に関する微分を表す.

(i)　$A(x) = [a_{ij}]$ とし，$Y(x) = [y_1, \cdots, y_n]$ を列ベクトルへの分割とする．更に $Ay_j = a_{1j}y_1 + \cdots + a_{nj}y_n$ とすると

$$\begin{aligned}(\det Y(x))' &= \sum_{j=1}^{n}\det[y_1, \cdots, y_j', \cdots, y_n] = \sum_{j=1}^{n}\det[y_1, \cdots, Ay_j, \cdots, y_n] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\det[y_1, \cdots, \overset{j}{\overset{\vee}{y_i}}, \cdots, y_n] \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{jj}\det[y_1, \cdots, \overset{j}{\overset{\vee}{y_j}}, \cdots, y_n] = (\mathrm{tr}A)\det Y\end{aligned}$$

故に $(\det Y)' = (\mathrm{tr}A)\det Y$ となる.

(ii)　一般の n 次正方行列値関数 $A(x), B(x)$ に対し $\frac{d(A(x)B(x))}{dx} = \frac{dA(x)}{dx}B(x) + A(x)\frac{dB(x)}{dx}$ だから,

$$O = \frac{d(Y(x)Y(x)^{-1})}{dx} = \frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1} + Y(x)\frac{d(Y(x)^{-1})}{dx}, \qquad \therefore \quad \frac{d(Y(x)^{-1})}{dx} = -Y(x)^{-1}\frac{dY(x)}{dx}Y(x)^{-1}.$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \frac{dM}{dx} &= \frac{dY}{dx}M_0Y^{-1} + YM_0\frac{d(Y^{-1})}{dx} \\ &= \frac{dY}{dx}M_0Y^{-1} - YM_0Y^{-1}\frac{dY}{dx}Y^{-1} = AYM_0Y^{-1} - YM_0Y^{-1}A = AM - MA.\end{aligned}$$

(iii)　$M = e^{-xA}Ne^{xA}$ と置くと

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dx} &= -Ae^{-xA}Ne^{xA} + e^{-xA}(AN - NA)e^{xA} + e^{-xA}NAe^{xA} \\ &= -Ae^{-xA}Ne^{xA} + Ae^{-xA}Ne^{xA} - e^{-xA}NAe^{xA} + e^{-xA}NAe^{xA} = O\end{aligned}$$

と $M(0) = N(0) = M_0$ より恒等的に $M = M_0$，従って $N = e^{xA}M_0e^{-xA}$ となる．この表示より

$$N(x_2) = e^{x_2A}M_0e^{-x_2A} = e^{(x_2-x_1)A}e^{x_1A}M_0e^{-x_1A}e^{-(x_2-x_1)A}$$

より $N(x_2) = PN(x_1)P^{-1}$　$(P = e^{(x_2-x_1)A})$ となる.　□