【問題】 微分方程式:

$$u' = a(z)u^2 + b(z)u(z) + c(z) \tag{i}$$

を考える．ここで $' = d/dz$ とし，$a(z), b(z), c(z)$ は複素平面内の領域 D で正則な関数で $a(z) \not\equiv 0$ とする．次の小問に答えよ．

(1) $v = 1/u$ が満たす微分方程式を求めよ．

(2) 変数変換 $u = -(1/a(z))(\log w)'$ によって定まる w に関する微分方程式を求めよ．

(3) $z_0 \in D$ に於いて $a(z_0) \neq 0$ とすると (i) のどの解も $z = z_0$ に於いて正則であるか，極を持つかのいずれかである事を示せ．

(H16 神戸大学理学研究科)

【解答】 (1) $u' = -v'/v^2$ だから $-\dfrac{v'}{v^2} = \dfrac{a}{v^2} + \dfrac{b}{v} + c, \quad \therefore \quad \underline{v' = -a - bv - cv^2}.$

(2) $u = -w'/aw$ 及び

$$u' = -\frac{w''aw - (a'w + aw')w'}{a^2w^2} = -\frac{aww'' - a'ww' - a(w')^2}{a^2w^2}$$

より

$$-\frac{aww'' - a'ww' - a(w')^2}{a^2w^2} = a\frac{(w')^2}{a^2w^2} - b\frac{w'}{aw} + c, \qquad aww'' - a'ww' = abww' - ca^2w^2.$$

両辺に $1/w$ を掛けて整理すれば $\underline{aw'' - (a' + ab)w' + ca^2w = 0}$.

(3) $a(z_0) \neq 0$ ならば z_0 の近傍 U に於いて $a(z) \neq 0$ となる．このとき (2) の 2 階線形常微分方程式の解 w は U 上で正則となる．更に $w(z) = (z - z_0)^r v(z)$ (v は正則，かつ $v(z_0) \neq 0$) とする．U を小さく取り直す事により v は U 上正則，かつ $v(z) \neq 0$ としてもよい．このとき

$$u(z) = -\frac{w'(z)}{a(z)w(z)} = -\frac{1}{a(z)}\left(\frac{r(z-z_0)^{r-1}v(z) + (z-z_0)^r v(z)}{(z-z_0)^r v(z)}\right) = -\frac{1}{a(z)}\left(\frac{r}{z - z_0} + \frac{v'(z)}{v(z)}\right)$$

となるから $w(z_0) \neq 0$ ならば u は正則，$w(z_0) = 0$ ならば z_0 は u の極．従って $u(z)$ は $z = z_0$ に於いて高々極を持つ．

□