【問題】 区間 I 上の連続関数の全体を $C(I)$ で表す．また I 上の C^1 級の関数の全体を $C^1(I)$ で表す．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) f, g を $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし，次の常微分方程式を考える．

$$\text{(P)}\ u'(x) + f(x)u(x) = 0,$$
$$\text{(Q)}\ u'(x) + f(x)u(x) = g(x).$$

$v \in C^1(\mathbb{R})$ を (Q) の一つの解とし，(P) の解全体の集合を X，(Q) の解全体の集合を Y とする．このとき $Y = \{u + v : u \in X\}$ となる事を示せ．

(2) 常微分方程式

$$u'(x) + xu(x) = x^3 \tag{a}$$

の全ての解を求めよ．

(B) 以下の問に答えよ．

(1) p を $[0, \infty)$ 上の非負値連続関数，C, α を非負定数とする．もし

$$p(x) \leq C + \alpha \int_0^x p(t)dt \qquad (x \in [0, \infty)) \tag{b}$$

が成立するならば,

$$p(x) \leq Ce^{\alpha x} \qquad (x \in [0, \infty)) \tag{c}$$

が成立する事を示せ．

(2) φ を $\mathbb{R}$ 上の連続関数，$a, u_0 \in \mathbb{R}$ とし，次の初期値問題を考える:

$$\text{(R)} \quad u'(x) + au(x) = \varphi(u(x)) \quad (x > 0), \qquad u(0) = u_0.$$

このとき $u \in C^1([0, \infty))$ が (R) の解である事と次が同値である事を示せ:

$$u \in C([0, \infty)) \quad \text{かつ} \quad u(x) = e^{-ax}u_0 + e^{-ax} \int_0^x e^{at}\varphi(u(t))dt \quad (x \in [0, \infty)). \tag{d}$$

(3) (2) に於いて更に次を仮定する：

・ $a > 0$.

・ $k \in [0, a)$ が存在して，任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $|\varphi(s)| \leq k|s|$ が成立する．

このとき $[0, \infty)$ 上の (R) の解 u は

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = 0$$

を満たす事を示せ．

(H25 広島大学理学研究科)

【解答】 (A) (1) $u \in X$ のとき $(u + v)' + f(u + v) = u' + fu + v' + fv = 0 + g = g$ より $u + v \in Y$．逆に $w \in Y$ に対し $u = w - v$ と置くと $u' + fu = w' + fw - (v' + fv) = g - g = 0$ より $u \in X$，即ち $w = u + v$ となる．

(2) $u' + xu = 0$ だとすると $(xu)' = 0$ より $xu = c$ （c は任意定数)．また $u' + xu = (xu)' = x^3$ より $v = \frac{1}{4}x^3$ は (a) の 1 つの解となる．(1) の結果より $u = \frac{1}{4}x^3 + \frac{c}{x}$ （c は任意定数) が (a) の解全体となる．

(B) (1) $\alpha > 0$ だとする．$q(x) = \displaystyle\int_0^x p(t)dt$ と置けば $q'(x) \leq C + \alpha q(x)$．両辺に $e^{-\alpha x}$ を掛けると

$$(e^{-\alpha x}q)' = e^{-\alpha x}q' - \alpha e^{-\alpha x}q \leq Ce^{-\alpha x}.$$

両辺を 0 から x まで積分すれば

$$e^{-\alpha x}q(x) = \int_0^x (e^{-\alpha t}q(t))'dt \leq \int_0^x Ce^{-\alpha t}dt = -\frac{C}{\alpha}(e^{-\alpha x} - 1), \qquad \therefore \quad p(x) \leq C + \alpha q(x) \leq Ce^{\alpha x}.$$

$\alpha = 0$ のときも含めて (c) は成立する．

(2) u が (R) を満たすとき，$u \in C([0, \infty))$ であり，$(e^{ax}u)' = e^{ax}(u' + au) = e^{ax}\varphi(u)$ だから

$$e^{ax}u - u(0) = \int_0^x e^{at}\varphi(u(t))dt, \qquad u = e^{-ax}u_0 + e^{-ax} \int_0^x e^{at}\varphi(u(t))dt.$$

逆に (d) が成立するとき，$\varphi \in C(\mathbb{R})$，$u \in C([0, \infty))$ だから $u \in C^1([0, \infty))$．$u(0) = u_0$ であり，また (d) の両辺を微分すれば

$$u' = -ae^{-ax}u_0 - ae^{-ax} \int_0^x e^{at}\varphi(u(t))dt. + e^{ax}(e^{ax}\varphi(u(x))) = -au + \varphi(u(x)).$$

故に (R) が成立する．
　(3)　(d) と仮定より

$$e^{ax}|u(x)| \leq |u_0| + \int_0^x e^{at}|\varphi(u(t))|dt \leq |u_0| + k\int_0^x e^{at}|u(t)|dt).$$

(1) より $e^{ax}|u(x)| \leq |u_0|e^{kx}$，従って $|u(x)| \leq |u_0|e^{-(a-k)x}$ となるから，$x \to \infty$ のとき $|u(x)| \to 0$ となる．　$\square$