【問題】 複素平面の単位円板 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ で定義された正則関数 $f(z)$ で

$$\|f\| := \left( \frac{1}{2\pi} \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{\sqrt{-1}\theta})|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

となるもの全体のなす複素数体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間を $\mathcal{H}$ と書く.

(1) $\mathcal{H}$ の元 $f(z)$ に対し，原点を中心とする $f(z)$ の Taylor 展開の係数を用いて $\|f\|$ を表せ.

(2) $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ 上のノルムであることを示せ.

(3) $\mathcal{H}$ は (複素) ノルム空間として $\ell^2$ と同型であることを示せ．但し「2 つのノルム空間 $E, F$ がノルム空間として同型」とは $E$ から $F$ への全射かつ単射な線形写像 $T$ でノルムを保つ (即ち $\|Tx\| = \|x\|$ が全ての $x \in E$ について成り立つ) ようなものが存在することとする.

参考：$\ell^2$ は複素数列 $a = (a_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ で $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ となるものの全体を表し，内積 $(a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ により Hilbert 空間であり，従って特に内積から決まるノルムに関して Banach 空間である.

(H14 千葉大学 自然科学研究科 数学・情報数理専攻)

【解答】 (1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を $f$ の $z = 0$ に於ける Taylor 展開とする．$0 < r < 1$ となる任意の $r$ を固定するとき，原点を中心とする半径 $r$ の閉円板 $\overline{D}_r(0)$ 上，特に原点を中心とする半径 $r$ の円周 $C_r(0)$ 上で $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n} z^m \overline{z}^n$ は $|f(z)|^2$ に一様収束するから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{\sqrt{-1}\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n} r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}(m-n)\theta} d\theta \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m \overline{a_n} r^{m+n} \delta_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \|f\| = \left( \sup_{0<r<1} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2) 1. $f \in \mathcal{H}$ に対し $0 \leq \|f\| < \infty$. $\|f\| = 0$ ならば，(1) より $f$ の Taylor 展開の係数は全て 0 だから $f = 0$.

2. $\alpha \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{H}$ に対し $\|\alpha f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha c_n|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$ より $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.

3. $f, g \in \mathcal{H}$ $(g = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n)$ とすると (1) と Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n + d_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||d_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 + 2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 = (\|f\|^2 + \|g\|^2)^2 \end{aligned}$$

従って $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ となる.

以上の 1,2,3 より $\|\cdot\|$ は $\mathcal{H}$ 上のノルムである事が示された.

(3) $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{H}$ に対し $Tf = (a_n)_{n=0,1,\ldots}$ と置けば (1) より $Tf \in \ell_2$ となり，この対応が $\mathcal{H}$ から $\ell_2$ への $\mathbb{C}$ 上の線形写像であることが分かる．また $\|Tf\| = \|f\|$ より $T$ はノルムを保つ事，および単射となる事が分かる．$(a_n)_{n=0,1,\ldots} \in \ell_2$ とする. Schwarz の不等式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

だから，$|z| < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$．従って $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は単位円板上の正則関数を定義し，(1) より $f \in \mathcal{H}$ となる．定義より $Tf = (a_n)_{n=0,1,\ldots}$ だから $T$ は全射となる.

以上より $T$ は $\mathcal{H}$ から $\ell_2$ への同型を与える. $\square$