

【問題】  $y = y(x)$  を  $x \geq 0$  で定義された関数とする.

(i) 微分方程式の初期値問題

$$(y')^2 = \frac{1}{2}y^4 - y^2 + \frac{1}{2}, \quad y(0) = 2 \quad (1)$$

の解のうち, 次の性質を満たすものを求めよ:

$$\text{任意の } x \geq 0 \text{ で } y > 1 \text{ と } y' \leq 0 \text{ が成り立つ.} \quad (2)$$

(ii) 微分方程式の初期値問題

$$y'' = y^3 - y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

の解を求めよ.

(H30 千葉大自然科学研究科 数学・情報数理専攻)

【解答】 (i)

$$(y')^2 = \frac{1}{2}(y^2 - 1)^2, \quad \therefore y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^2 - 1), \text{ または } y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(y^2 - 1) \quad (4)$$

前, 後者は共に変数分離形であり, 一般解は

$$y = \frac{1 + ce^{\sqrt{2}x}}{1 - ce^{\sqrt{2}x}}, \quad y = \frac{1 + ce^{-\sqrt{2}x}}{1 - ce^{-\sqrt{2}x}} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad (5)$$

ここで (1) の初期条件と併せれば

$$y = \frac{3 + e^{\sqrt{2}x}}{3 - e^{\sqrt{2}x}}, \quad y = \frac{3e^{\sqrt{2}x} + 1}{3e^{\sqrt{2}x} - 1}$$

が解となる.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \log 3 < x$  となる  $x$  に対し前者の解は  $y < 0$  となる. 一方,

$$6e^{\sqrt{2}x} - 2 < 6e^{\sqrt{2}x}, \quad 1 < \frac{6e^{\sqrt{2}x}}{3e^{\sqrt{2}x} - 1} - 1 = \frac{3e^{\sqrt{2}x} + 1}{3e^{\sqrt{2}x} - 1}$$

より後者は  $x \geq 0$  で  $y > 1$  となり,

$$\left( \frac{3e^{\sqrt{2}x} + 1}{3e^{\sqrt{2}x} - 1} \right)' = \left( \frac{6}{3 - e^{-\sqrt{2}x}} - 1 \right)' = -\frac{6\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x}}{(3 - e^{-\sqrt{2}x})^2} \leq 0.$$

従って条件を満たす解は  $y = \frac{3e^{\sqrt{2}x} + 1}{3e^{\sqrt{2}x} - 1}$  である.

(ii) (3) の微分方程式の両辺に  $2y'$  を掛け, 積分すると

$$2y'y'' = 2y'y^3 - 2y'y, \quad (y')^2 = \frac{1}{2}y^4 - y^2 + C \quad (C \text{ は任意定数}).$$

(3) の初期条件より  $C = \frac{1}{2}$  であり, また (4) の後者の解となる. よって一般解は (5) の後方で与えられ, 再び (3) の初期条件を用いれば, この初期値問題の解は  $y = \frac{e^{\sqrt{2}x} - 1}{e^{\sqrt{2}x}} + 1$  となる.  $\square$

【問題】  $p(x), q(x)$  を開区間  $I \subset \mathbb{R}$  で連続な実数値関数として、2 階同次線形微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (\text{E})$$

を考える。(E) の解  $y_1(x), y_2(x)$  に対して、その Wronskian  $W_{(y_1, y_2)}(x)$  は

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

で定義される。

(1)  $y_1(x), y_2(x)$  が (E) の線形従属な解であれば、 $I$  に於いて恒等的に

$$W_{(y_1, y_2)}(x) = 0 \quad (x \in I)$$

である事を示せ。

(ii)  $y_1(x), y_2(x)$  が (E) の線形独立な解であれば、 $W_{(y_1, y_2)}(x)$  は  $I$  に於いて、常に正であるか常に負であるかのいずれかである事を証明せよ。

(iii)  $y = y(x)$  は (E) の非自明な解とし、 $a, b \in I$  ( $a < b$ ) は  $y(x)$  の隣り合う零点、即ち

$$y(a) = y(b) = 0 \quad \text{かつ} \quad y(x) \neq 0 \quad (a < x < b)$$

を満たすものとする。このとき

$$y'(a)y'(b) < 0 \quad (1)$$

が成り立つ事を証明せよ。

(iv)  $y_1(x), y_2(x)$  が (E) の線形独立な解とする。このとき、 $y_1(x)$  の任意の隣り合う零点の間に必ず  $y_2(x)$  の零点である事を証明せよ。

(H29 千葉大自然科学研究科 数学・情報数理専攻)

【解答】 (i) (ii)  $W = W_{(y_1, y_2)}$  と置く。

$$\begin{aligned} W' &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' - qy_1 & -py_2' - qy_2 \end{vmatrix} = -p \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

従って 1 階線形微分方程式  $W' = -pW$  を満たす。これを解けば  $W = W(0)e^{\int p(x)dx}$ 。この表示より  $W(0) = 0$  ならば  $W = 0$  であり、 $\pm W(0) > 0$  ならば  $\pm W > 0$  となる。

(iii) 必要なら  $-1$  倍する事により  $y(x) > 0$  ( $a < x < b$ ) と仮定してもよい。 $x \in (a, b)$  に対し  $y(a) < y(x)$  より  $a$  に十分近い  $x$  に対し単調増加するから  $y'(a) > 0$ 。一方、 $y(x) > y(b)$  より  $b$  に十分近い  $x$  に対し単調減少するから  $y'(b) < 0$ 。故に  $y'(a)y'(b) < 0$  となる。

(iv)  $W = W_{(y_1, y_2)}$  と置く。 $W > 0$  だと仮定する。このとき  $y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a) = -y_2(a)y_1'(a) > 0$ 。同様に  $-y_2(b)y_1'(b) > 0$ 。特に  $y_2(a)y_2(b) \neq 0$ 。また (iii) より  $y_1'(a), y_1'(b)$  は異符号だから、 $y_2(a), y_2(b)$  は異符号となり、中間値の定理から  $y_2$  は開区間  $(a, b)$  で少なくとも 1 つは零点を持つ。□

【問題】 次の微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) + f(t) \quad (1)$$

を考える. ただし  $f \in C([0, \infty))$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  とする. このとき以下に答えよ.

- (a)  $f(t) = e^{-t} \sin t$  のとき, (1) の解を求めよ.  
(ii) 初期値  $x_0$  を

$$x_0 = - \int_0^{\infty} e^{-s} f(s) ds \quad (2)$$

とするとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  を示せ.

- (iii) 初期値  $x_0$  を

$$x_0 > - \int_0^{\infty} e^{-s} f(s) ds \quad (3)$$

とするとき,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$  を示せ.

(H28 千葉大自然科学研究科 数学・情報数理専攻)

【解答】 (i) (1) の両辺に  $e^{-t}$  を掛ければ

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}x) = e^{-t} \left( \frac{dx}{dt} - x \right) = e^{-t} f(t)$$

$$\therefore e^{-t}x(t) = \int_0^t e^{-s} f(s) ds + x_0, \quad x(t) = e^t \int_0^t e^{-s} f(s) ds + x_0 e^t. \quad (4)$$

ここで  $I = \int e^{-2s} \sin s ds$  と置くと, 部分積分より

$$I = -e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \sin t - 4I, \quad \therefore I = -\frac{e^{-2t}}{5}(\cos t + 2 \sin t) + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

だから, これを (4) に代入し, 初期条件を用いれば

$$x(t) = -\frac{e^{-t}}{5}(\cos t + 2 \sin t) + \left(\frac{1}{5} + x_0\right)e^t.$$

- (ii) (4) に (2) を代入すれば

$$x(t) = e^t \left( \int_0^t e^{-s} f(s) ds - \int_0^{\infty} e^{-s} f(s) ds \right) = -e^t \int_t^{\infty} e^{-s} f(s) ds.$$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $f$  に関する仮定より  $|f(t)| < \varepsilon$  ( $t \geq T$ ) となる正数  $T$  が存在.  $t \geq T$  のとき

$$|x(t)| \leq e^t \int_t^{\infty} e^{-s} |f(s)| ds < \varepsilon e^t \cdot e^{-t} = \varepsilon$$

だから  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  となる.

- (iii)  $M = x_0 + \int_0^{\infty} e^{-s} f(s) ds$  と置けば, (3) より  $M > 0$ . 更に

$$\int_0^t e^{-s} f(s) ds + x_0 \geq \frac{M}{2} \quad (t \geq T)$$

となる  $T$  が存在する.  $t \geq T$  のとき,

$$x(t) = e^t \left( \int_0^t e^{-s} f(s) ds + x_0 \right) \geq \frac{M}{2} e^t$$

だから  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$  となる. □

【問題】  $H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta)^2 + \frac{1}{4}\xi^4$ ,  $V(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$  とする. 次の 2 つの常微分方程式系を考える:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (I)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (II)$$

以下の問いに答えよ.

(i)  $(\xi(t), \eta(t))$  を (I) の解とし,  $F(t) = H(\xi(t), \eta(t))$  とするとき,

$$\frac{d}{dt} F(t) = 0 \quad (1)$$

を示せ.

(ii)  $(\xi(t), \eta(t))$  を (I) の解とし,  $(\xi(t), \eta(t))$  が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

を満たすならば, 任意の  $t$  に対して,

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

が成立する事を示せ.

(iii)  $(x(t), y(t))$  を (II) の解とし,  $G(t) = V(x(t), y(t))$  とするとき,  $G$  の満たす微分方程式を求めよ.

(iv)  $(x(t), y(t))$  を (II) の解とすると,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

を示せ.

(H26 千葉大自然科学研究科 数学・情報数理専攻)

【解答】 により  $t$  に関する微分を表す事にする.

(i) (I) より  $\frac{\partial H}{\partial \xi} = -\eta$ ,  $\frac{\partial H}{\partial \eta} = \xi$  だから

$$\dot{F} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial H}{\partial \eta} \dot{\eta} = \eta \dot{\xi} + \xi \dot{\eta} = 0$$

(ii) (i) より  $F(t) = c$  (= 定数). 仮定より  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} H(\xi(t), \eta(t)) = 0$ .  $H$  の定義式より  $\xi(t) + \eta(t) = \xi(t) = 0$ . 故に  $(\xi(t), \eta(t)) = (0, 0)$ .

(iii)

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} \\ &= x(x^2 + y^2) \dot{x} + y(x^2 + y^2) \dot{y} = -(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

従って  $\dot{G} = -4G$ .

(iv) (iii) の方程式を解いて  $G = Ce^{-4t}$  ( $C$  は任意定数).  $t \rightarrow \infty$  ならば  $G(t) = \frac{1}{4}(x(t)^2 + y(t)^2)^2 \rightarrow 0$ . 従って  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となる.  $\square$