線形代数 **I** 補足　『空間内の直線・平面』

空間内の直線・平面に関する問題を扱う．*2．尚，一部に空間ベクトルの内積を用いる (内積については高校の教科書等参照.) 以下，空間内の点 P (x, y, z) と原点を始点とし点 P を終点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = {}^t[x, y, z]$ を同一視する．

◆ **直線・平面のベクトル表示式 (媒介変数表示)** 直線, 平面上の各点を媒介変数を用いて表示する方法．座標 (= 基底) は設定されていなくともよい．

直線 ℓ のベクトル表示式： 直線 ℓ は通過点 P_0 と 1 つの方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ を与えれば定まる．$\boldsymbol{x}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ とするとき，原点を始点とし直線 ℓ 上の点 P を終点とするベクトル $\boldsymbol{x}$ はパラメーター t を用いて

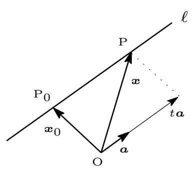
$$\ell:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

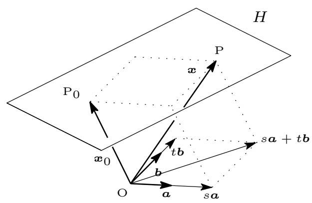
と表される (下左図参照)．

平面 H のベクトル表示式： 平面 H は通過点 P_0 と 2 つの方向ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を与えれば定まる．このとき原点を始点とし平面 H 上の点 P を終点とするベクトル $\boldsymbol{x}$ はパラメーター s, t を用いて

$$H:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{a} \qquad (s, t \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

と表される (下右図参照)．





◆ **直線・平面の方程式**　空間に座標 (= 基底) が設定してある場合は直線, 平面を方程式により記述できる．方程式は直線, 平面上にある為の座標に関する条件を表す (ベクトル表示のように各点を表示している訳ではない)．

直線 ℓ について： $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[x_0, y_0, z_0]$, $\boldsymbol{a} = {}^t[a, b, c]$, $\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z]$ だとし，これをベクトル表示式 (1) に代入すると

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{array} \right. \tag{3}$$

この式よりパラメーター t を消去して得られる式を**直線 ℓ の方程式**という．例えば $a, b, c \neq 0$ (resp. $a = 0$, $b, c \neq 0$, $\cdots$) ならば，直線 ℓ の方程式は次で与えられる：

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \left(\text{resp.}\quad x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \ \cdots \right). \tag{4}$$

平面 H について： $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[x_0, y_0, z_0]$, $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, b_1, c_1]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[a_2, b_2, c_2]$, $\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z]$ だとし，これをベクトル表示式 (2) に代入すると

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z = z_0 + +sc_1 + tc_2 \end{array} \right. \tag{5}$$

この式よりパラメーター s, t を消去すれば結果として

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (A, B, C \text{ の何れかは } 0 \text{ ではない}) \tag{6}$$

という形の式が現れる．この式を**平面 H の方程式**という (以下の**例題 4** 参照)．

---

*2 ここに言う ‘空間’ とは 3 次元 Euclid 空間 (= (標準) 内積を備えた 3 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$) を表す．平面 (2 次元 Euclid 空間) でも同様に扱う事が可能だが，ここでは空間のみを扱う．

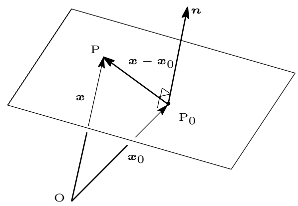
◆ **法線ベクトルの方法**　通る点 $\boldsymbol{x}_0$ と ((2 つの) 方向ベクトルを与える代わりに) 平面と直交するベクトル $\boldsymbol{n}$ (これを**法線ベクトル**という) を与えるとき,

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \perp \boldsymbol{n}, \quad \text{即ち} \quad (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{7}$$

となるベクトル $\boldsymbol{x}$ の全体は空間内の平面を作る (右図参照). $\boldsymbol{x}_0={}^t[x_0,y_0,z_0]$, $\boldsymbol{n}={}^t[A,B,C]$, $\boldsymbol{x}={}^t[x,y,z]$ だとし, これを (7) に代入すると

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad Ax+By+Cz+D=0 \tag{8}$$

$(D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ と置く) となり, 再び平面 H の方程式を得る.



◆ **方程式 ⇒ ベクトル表示式**　ベクトル表示式と方程式による表示は問題に応じて使い分ける. ベクトル表示式から方程式を得る方法は上に見た通りであり, 一方, 方程式が分かっている場合は次のようにしてベクトル表示式が得られる：

直線 ℓ について： 直線の方程式が $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ により与えられる場合, これを $=t$ と置いて整理すれば ℓ のベクトル表示式 (3) を得る.

平面 H について： 平面の方程式 $ax+by+cz+d=0$ が与えられるとする. $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ だから, a,b,c の何れかは 0 ではない. 例えば $a\neq 0$ だとする. このとき $x=-\dfrac{b}{a}y-\dfrac{c}{a}z-\dfrac{d}{a}$ だから, $y=s$, $z=t$ と置けば H 上の点 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}z-\frac{d}{a}\\y\\z\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{d}{a}\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (s,t\in\mathbb{R}). \tag{9}$$

により与えられる. $b,c\neq 0$ の場合も同様.

例題 1. 次の直線のベクトル表示式を求めよ.

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0={}^t[1,\ 0,\ -1]$ を通り, $\boldsymbol{a}={}^t[2,\ 1,\ 2]$ を方向ベクトルを持つ空間 $\mathbb{R}^3$ 内の直線 ℓ_1.

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0={}^t[2,\ 1,\ 0]$, $\boldsymbol{x}_1={}^t[1,\ 3,\ 2]$ を通る空間 $\mathbb{R}^3$ 内の直線 ℓ_2.

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0={}^t[2,\ 1,\ 0]$, $\boldsymbol{x}_1={}^t[0,\ 1,\ 2]$ を通る空間 $\mathbb{R}^3$ 内の直線 ℓ_3.

(iv) 点 $\boldsymbol{x}_0={}^t[1,\ 1,\ 0]$ を通り, z 軸に平行な空間 $\mathbb{R}^3$ 内の直線 ℓ_4.

【解答】 (i) ベクトル表示式は ${}^t[x,y,z]={}^t[1,0,-1]+t\,{}^t[2,1,2]$ $(t\in\mathbb{R})$.

(ii) ℓ_2 は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0={}^t[1-2,3-1,2-0]={}^t[-1,2,2]$ を方向ベクトルとする直線だから, ベクトル表示式は ${}^t[x,y,z]={}^t[2,1,0]+t\,{}^t[-1,2,2]$ $(t\in\mathbb{R})$.

(iii) ℓ_2 は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0={}^t[0-2,1-1,2-0]={}^t[-2,0,2]$ を方向ベクトルとする直線だから, ベクトル表示式は ${}^t[x,y,z]={}^t[2,1,0]+t\,{}^t[-2,0,2]$ $(t\in\mathbb{R})$.

(iv) ℓ_2 は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, z 軸と同じ方向ベクトル $\boldsymbol{e}_3={}^t[0,0,1]$ を持つ直線だから, ベクトル表示式は ${}^t[x,y,z]={}^t[1,1,0]+t\,{}^t[0,0,1]$ $(t\in\mathbb{R})$. □

例題 2. 空間内の平面に関する次の問に答えよ.

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0={}^t[1,\ 1,\ 0]$ を通り, $\boldsymbol{a}={}^t[1,\ 2,\ 0]$, $\boldsymbol{b}={}^t[1,\ 0,\ 2]$ を方向ベクトルを持つ空間 $\mathbb{R}^3$ 内の平面 H_1 のベクトル表示式を求めよ.

(ii) 3 点 $\boldsymbol{x}_1={}^t[1,\ 2,\ 3]$, $\boldsymbol{x}_2={}^t[2,\ 3,\ 1]$, $\boldsymbol{x}_3={}^t[3,\ 1,\ 2]$ を通る平面 H_2 のベクトル表示式を求めよ.

【解答】 (i) ベクトル表示式は ${}^t[x,y,z]={}^t[1,1,0]+s\,{}^t[1,2,0]+t\,{}^t[1,0,2]$ $(s,t\in\mathbb{R})$.

(ii) H_2 は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0={}^t[1,1,-2]$, $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_0={}^t[2,-1,0]$ を方向ベクトルとする平面だから, H_2 のベクトル表示式は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} \qquad (s,t\in\mathbb{R})$$

□

例題 3. **例題 1.** に与えられる直線 $\ell_1, \cdots, \ell_4$ の方程式を求めよ．

【解答】 (i) ℓ_1 について： ベクトル表示式 ${}^t[x,y,z] = {}^t[1,0,-1] + t\,{}^t[2,1,2]$ $(t \in \mathbb{R})$ より方程式は $\dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z+1}{2}$.
(ii) ℓ_2 について： ベクトル表示式 ${}^t[x,y,z] = {}^t[2,1,0] + t\,{}^t[-1,2,2]$ $(t \in \mathbb{R})$ より方程式は $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{2}$.
(iii) ℓ_3 について： ベクトル表示式 ${}^t[x,y,z] = {}^t[2,1,0] + t\,{}^t[-2,0,2]$ $(t \in \mathbb{R})$ より方程式は $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{z}{2},\ y = 1.$
(iv) ℓ_4 について： ベクトル表示式 ${}^t[x,y,z] = {}^t[1,1,0] + t\,{}^t[0,0,1]$ $(t \in \mathbb{R})$ より方程式は $x = 1,\ y = 1.$ □

例題 4. **例題 2.** に与えられる平面 H_1, H_2 の方程式を求めよ．

【解答】 (i) **例題 2** (i) より $x = 1+s+t,\ y = 1+2s,\ z = 2t$ $(s,t \in \mathbb{R})$ だから，H_1 の方程式は $x = 1 + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{z}{2}$, 従って $2x - y - z = 1$
(ii) **例題 2** (ii) より $x = 1+s+2t,\ \ y = 2+s-t,\ \ z = 3-2s$. 第 3 式より $s = \frac{3-z}{2}$ だから，これを第 1,2 式に代入して $x = 1 + \frac{3-z}{2} + 2t,\ \ y = 2 + \frac{3-z}{2} - t$. この 2 式より t を消去すれば $2x + 4y + 3z - 13 = 0$. □

例題 5. (i) $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[1,\ -1,\ 2]$ を通り，$\boldsymbol{n} = {}^t[2,\ 1,\ 2]$ を法線ベクトルとする平面 H_3 の方程式を求めよ．
(ii) 平面 $2x - y - z = 1$ の法線ベクトルを求めよ．

【解答】 (i) 平面 H_3 の方程式は $2(x-1) + (y-(-1)) + 2(z-2) = 0,\quad 2x + y + 2z - 5 = 0.$
(ii) 方程式の形より $\boldsymbol{n} = {}^t[2,-1,-1]$. □

例題 6. (i) **例題 5** の平面 H_3 のベクトル表示式を求めよ．
(ii) 平面 $2x - y - z = 1$ (**例題 4** (ii)) のベクトル表示式を求めよ．

【解答】 (i) H_3 の方程式より $x = -\frac{1}{2}y - z + \frac{5}{2}$ だから，H_3 上の点 $\boldsymbol{x} = {}^t[x,y,z]$ は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}y - z + \frac{5}{2} \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s,t \in \mathbb{R},\ (y = 2s,\ z = t \text{ と置いた}))$$

と表される．
(ii) $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ より平面上の点 $\boldsymbol{x} = {}^t[x,y,z]$ は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (s,t \in \mathbb{R},\ (y = 2s,\ z = 2t \text{ と置いた}))$$

と表される．(ちなみに s を $s + \frac{1}{2}$ に置き換えると

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (s + 1/2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (s,t \in \mathbb{R})$$

となり，**例題 2** (i) のベクトル表示式と一致する．特に平面のベクトル表示式は一意ではない．) □

〜〜 演習問題 〜〜

演習問題 1. $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[x_0, y_0, z_0]$ を通り，$\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, b_1, c_1]$，$\boldsymbol{b} = {}^t[a_2, b_2, c_2]$ を通る平面 H の方程式は次で与えられる事を示せ：

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} A = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \end{array} \right)$$

演習問題 2. 直線または平面についての次の問に答えよ．

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[3, -4, 1]$ を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{a} = {}^t[5, 4, -2]$ の直線の方程式を求めよ．

(ii) 3 点 $\boldsymbol{x}_1 = {}^t[1, 2, -1]$ を通り，法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = {}^t[4, -1, 2]$ の平面の方程式を求めよ．

(iii) $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[2, 0, -1]$ を通り，直線 $\dfrac{x+7}{4} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{-3}$ に平行な直線の方程式を求めよ．

(iv) $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[-1, 5, -2]$ を通り，平面 $x - 2y + 3z - 4 = 0$ に直交する直線の方程式を求めよ．

(v) $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[1, 1, 0]$ を通り，直線 $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{-5} = 1 - z$ に直交する平面の方程式を求めよ．

(vi) $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[2, 3, 1]$ を通り，平面 $2x - 6y + 3z - 4 = 0$ に平行な平面の方程式を求めよ．

(vii) 3 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[1, 2, 4]$，$\boldsymbol{x}_1 = {}^t[0, 3, 1]$，$\boldsymbol{x}_2 = {}^t[-3, 1, -3]$ を通る平面の方程式を求めよ．

(viii) 直線 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$ と $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[9, 3, 0]$ を含む平面の方程式を求めよ．

(ix) 2 直線 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+2}{4}$，$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{5}$ を含む平面の方程式を求めよ．

(x) 2 直線 $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{2}$，$\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-6}{2}$ を含む平面の方程式を求めよ．

演習問題 3. 次の各点を求めよ．

(i) 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[-2, 9, 0]$ から平面 $3x - 2y - z - 4 = 0$ に下した垂線の足．

(ii) 直線 $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z+3}{-1}$ と平面 $4x - 5y + z + 11 = 0$ の交点．

(iii) 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[5, -4, 1]$ から直線 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$ に下した垂線の足．

演習問題 4. (i) 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[x_0, y_0]$ を通り，直線 $\ell : ax + by + c = 0$ との距離 d ($= \boldsymbol{x}_0$ から ℓ に下した垂線の長さ) は次で与えられる事を示せ：

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[x_0, y_0, z_0]$ を通り，平面 $H : ax + by + cz + d = 0$ との距離 d ($= \boldsymbol{x}_0$ から H に下した垂線の長さ) は次で与えられる事を示せ：

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

演習問題 5. 次の距離を求めよ．

(i) 平面上の点 ${}^t[6, -1]$ と直線 $4x - 6y + 9 = 0$ との距離．

(ii) 点 ${}^t[-2, 5, 4]$ と平面 $x - 2y - 2z + 8 = 0$ との距離．

(iii) 平面上の平行な 2 直線 $4x + 3y = 2$，$4x + 3y = -1$ の距離．

(iv) 平行な 2 平面 $2x - 4y + 5z + 3 = 0$, $2x - 4y + 5z - 2 = 0$ の距離．

(v) 点${}^t[2, 4, -1]$ と直線 $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{-2}$ の距離．

(vi) 平行な 2 直線 $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z + 2$，$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = z$ の距離．

〜〜 解答編 〜〜

演習問題 1. H 上の点 $\boldsymbol{x} = {}^t[x,y,z]$ は $s,t \in \mathbb{R}$ を用いて $x = x_0 + sa_1 + tb_1$, $y = y_0 + sa_2 + tb_2$, $z = z_0 + sa_3 + tb_3$ と表される．ここで斉次連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を考えると，上の式はこの連立一次方程式が非自明解 ${}^t[-1,s,t]$ $(\neq \mathbf{o})$ を持つ事を意味する．連立一次方程式が非自明解を持つ事と係数行列の行列式が 0 である事は同値であり，係数行列の行列式を第 1 列について余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

を得る．ここで $A = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ と置けば $Ax + By + Cz + D = 0$ となる．

演習問題 2. (i) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{x-1}{-2}$ (ii) $4x - y + 2z = 0$

(iii) 方向ベクトルは ${}^t[4,-1,-3]$ だから $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-3}$

(iv) 平面の法線ベクトルは ${}^t[1,-2,3]$ であり，直線は平面に直交，従ってこの法線ベクトルを方向ベクトルに持つから $x+1 = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z+2}{3}$

(v) 直線の方向ベクトルは ${}^t[3,-5,-1]$ であり，平面はこの方向ベクトルを法線ベクトルに持つから $3(x-1)-5(y-1)-(z-0) = 0$, よって $3x - 5y - z + 2 = 0$

(vi) $2x - 6y + 3z - 4 = 0$ の法線ベクトルは ${}^t[2,-6,3]$ であり，求める平面は同じ法線ベクトルを持つから，$2(x-2) - 6(y-3) + 3(z-1) = 0$, よって $2x - 6y + 3z + 11 = 0$

(vii) 求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り，$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0 = {}^t[-1,1,-3]$, $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0 = {}^t[-4,-1,-7]$ を方向ベクトルに持つから，そのベクトル表示式は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = 1 - s - 4t \\ y = 2 + s - t \\ z = 4 - 3s - 7t \end{cases} \quad (s,t \in \mathbb{R})$$

これらの式から s,t を消去して $2x - y - z + 4 = 0$

(viii) 直線は点 ${}^t[1,1,1]$ を通り，方向ベクトル ${}^t[2,-3,-2]$ を持つ．求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り，${}^t[2,-3,-2]$ と ${}^t[1,1,1] - {}^t[9,3,0] = {}^t[-8,-2,1]$ を方向ベクトルに持つから，そのベクトル表示式は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = 9 + 2s - 8t \\ y = 3 - 3s - 2t \\ z = -2s + t \end{cases} \quad (s,t \in \mathbb{R})$$

これらの式から s,t を消去して $x - 2y + 4z - 3 = 0$

(ix) 2 直線は共に ${}^t[1,0,-2]$ を通り，方向ベクトルはそれぞれ ${}^t[3,-2,4]$, ${}^t[2,-3,5]$ である．この 2 直線を含む平面は ${}^t[1,0,-2]$ を通り，${}^t[3,-2,4]$, ${}^t[2,-3,5]$ を方向ベクトルに持つから，この平面のベクトル表示式は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = 1 + 3s + 2t \\ y = -2s - 3t \\ z = -2 + 4s + 5t \end{cases} \quad (s,t \in \mathbb{R})$$

これらの式から s,t を消去して $2x - 7y - 5z - 12 = 0$

(x) 2 直線は共に ${}^t[3,-1,-2]$ を方向ベクトルに持ち，それぞれ点 ${}^t[-2,4,0]$, ${}^t[5,-1,6]$ を通る．この 2 直線を含む平面は ${}^t[-2,4,0]$ を通り，${}^t[3,-1,-2]$, ${}^t[5,-1,6] - {}^t[-2,4,0] = {}^t[7,-5,6]$ を方向ベクトルに持つから，この平面のベクトル表示式は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x = -2 + 3s + 7t \\ y = 4 - s - 5t \\ z = -s + 6t \end{cases} \quad (s,t \in \mathbb{R})$$

これらの式から s,t を消去して $x - y - 2z - 2 = 0$

演習問題 3. (i) 平面の垂線の方向ベクトル (= 平面の法線ベクトル) は ${}^t[3,-2,-1]$ だから，垂線のベクトル表示式は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -2+3t \\ y = 9-2t \\ z = -t \end{array} \right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

垂線の足は平面の方程式 $3x-2y-z=0$ を満たす垂線上の点だから，

$$3x-2y-z = 3(-2+3t)-2(9-2t)-(-t)-4 = 0 \qquad \therefore \quad t=2$$

よって垂線の足の座標は ${}^t[-2+3\cdot 2, 9-2\cdot 2, -\cdot 2,] = {}^t[4,5,-2]$.

(ii) 直線のベクトル表示式は ${}^t[x,y,z] = {}^t[4,2,-3]+t^t[3,5,-1]$ $(t\in\mathbb{R})$．交点は平面の方程式 $4x-5y+z+11=0$ を満たす直線上の点だから，

$$4x-5y+z+11 = 4(4+3t)-5(9+5t)+(-3-t)+11 = 0 \qquad \therefore \quad t=1$$

よって垂線の足の座標は ${}^t[4+3\cdot 1, 2+5\cdot 1, -3-1,] = {}^t[7,7,-4]$.

(iii) 点から直線に下した垂線の足は点を通り直線と直交する平面とこの直線との交点である．直線の方向ベクトルは ${}^t[2,-2,-1]$ だから，これを法線ベクトルに持ち，点 $\boldsymbol{x}_0$ を通る平面の方程式は $2(x-5)-2(y+4)-(z-1)=0$, $2x-2y-z=17$. 一方，直線上の点は ${}^t[x,y,z] = {}^t[0,-2,3]+t^t[2,-2,-1]$ $(t\in\mathbb{R})$ と表されるから，これを $2x-2y-z=17$ に代入して $2(2t)-2(-2-2t)-(3-t)=17$, $t=16/9$. 従って点から直線への垂線の足の座標は ${}^t[2\cdot(16/9), -2-2\cdot(16/9), 3-(16/9)] = {}^t[32/9, -50/9, 11/9]$.

演習問題 4. (i) $\boldsymbol{n} = {}^t[a,b]$ とすれば，$\boldsymbol{n}$ は直線 ℓ の法線ベクトルだから，$\boldsymbol{x}_0$ を通り ℓ に直交する直線 (= ℓ の垂線) 上の点は $\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{n}$ (λ) と表される．この各座標の成分を平面の方程式に代入すれば

$$a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c=0, \qquad \lambda = -\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2} = -\frac{ax_0+by_0+c}{\|\boldsymbol{n}\|^2}$$

だから，$\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}_0$ からの ℓ への垂線の足，即ち $\boldsymbol{x}_0$ と ℓ の交点までの距離 d は

$$d = \|(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{n})-\boldsymbol{x}_0\| = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right| \|\boldsymbol{n}\| = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(ii) $\boldsymbol{n} = {}^t[a,b,c]$ とすれば，$\boldsymbol{n}$ は平面 H の法線ベクトルだから，$\boldsymbol{x}_0$ を通り H に直交する直線 ℓ (= H の垂線) 上の点は $\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{n}$ (λ) と表される．この各座標の成分を平面の方程式に代入すれば

$$a(x_0+\lambda a)+b(y_0+\lambda b)+c(z_0+\lambda c)+d=0, \qquad \lambda = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2} = -\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\|\boldsymbol{n}\|^2}$$

だから，$\boldsymbol{x}_0$ と $\boldsymbol{x}_0$ からの H への垂線の足，即ち ℓ と H の交点までの距離 d は

$$d = \|(\boldsymbol{x}_0+\lambda\boldsymbol{n})-\boldsymbol{x}_0\| = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}\right| \|\boldsymbol{n}\| = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

演習問題 5. (i) $d = \dfrac{|4\cdot 6-6(-1)+9|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{13}$.

(ii) $d = \dfrac{|-2-2\cdot 5-2\cdot 4+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = 4$.

(iii) 直線 $4x+3y=2$ 上の点 $(2,-2)$ と直線 $4x+3y+1=0$ の距離 d が 2 直線の距離になる．$d = \dfrac{|4\cdot 2+3(-2)+1|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{3}{5}$.

(iv) 平面 $2x-4y+5z+3=0$ 上の任意の点，例えば点 $(1,0,-1)$ をとる．この点と平面 $2x-4y+5z-2=0$ の距離 d が 2 平面の距離になる．$d = \dfrac{|2\cdot 1-4\cdot 0+5(-1)-2|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+5^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

(v) 点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[2,4,-1]$ を通り直線に直交する平面を H とする．H は直線の方向ベクトル ${}^t[3,4,-2]$ を法線ベクトルとし，$\boldsymbol{x}_0$ を通る平面だから，その方程式は

$$3(x-2)+4(y-4)+(-2)(z+1)=0, \qquad 3x+4y-2z-24=0.$$

直線上の点の座標 ${}^t[3t+1, 4t-2, -2t]$ をこの方程式に代入すれば

$$3(3t+1)+4(4t-2)-2(-2t)-24=0 \qquad \therefore \quad t=1.$$

従って直線と平面 H との交点は ${}^t[4,2,-2]$．よって距離は $\sqrt{(4-2)^2+(2-4)^2+(-2+1)^2} = 3$.

(vi) 前者の直線上の任意の点，例えば $\boldsymbol{x}_0 = {}^t[-1,2,-2]$ をとる．この点と後者の直線との距離を求めればよい．$\boldsymbol{x}_0$ を通り直線に直交する平面を H とする．H は直線の方向ベクトル ${}^t[2,-1,1]$ を法線ベクトルとし，$\boldsymbol{x}_0$ を通る平面だから，その方程式は

$$2(x+1)-(y-2)+z+2=0, \qquad 2x-y+z+6=0.$$

後者の直線上の点の座標 ${}^t[2t+1, -t-4, t]$ をこの方程式に代入すれば

$$2(2t+1) - (-t-4) + t + 6 = 0 \qquad \therefore \quad t = -2$$

従って直線と平面 H の交点は ${}^t[-3, -2, -2]$. よって 2 直線の距離は $\sqrt{(-3-(-1))^2 + (-2-2)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{20}$

～～ 参考文献 ～～

[1] 三宅敏恒 **線形代数学** (培風館 2008)

[2] 寺田文行・平吹慎吉 **セミナーテキスト線形代数** (サイエンス社 1985)