線形代数 I　簡約化の補充問題

◆ **簡約行列**　次の 4 条件を満たす行列を**簡約行列**という：

(I)　行ベクトルのうちに零ベクトルがあれば，それは零ベクトルでないベクトルより下にある．

(II)　零ベクトルでない行ベクトルの主成分は 1 である．

(III)　第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると，$j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる．即ち各行の主成分は下の行ほど右にある．

(IV)　各行の主成分を含む列の他の成分は全て 0 である．即ち第 i 行の主成分が a_{ij_i} ならば，第 j_i 列ベクトルの a_{ij_i} 以外の成分は全て 0 である．

◆ **簡約化**　与えられた行列 A から行基本変形のみを用いて簡約行列を作る事，及び結果の簡約行列を A の**簡約化** という．

◆ **階数**　簡約化の結果の零ベクトルではない行ベクトルの個数を元の行列の**階数** (rank) という．

【例題 1】　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を簡約化せよ．また A の階数を求めよ．

【解答】

$$A \underset{\substack{①\ +2\times②\\ ③\ +2\times②}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2+2\times(-1) & 1+2\times 1 & 2+2\times(-1) & 1+2\times 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2+2\times(-1) & 2+2\times 1 & 1+2\times(-1) & 1+2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{①\ \leftrightarrow\ ②}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{①\ \times(-1)\\ ③\ \times(1/3)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{①\ +\ ②\\ ③\ +(-4)\times②}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{③\ \times(-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{①\ +(-1)\times③}{\longrightarrow} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

簡約化の結果より $\operatorname{rank} A = 3$ である．　□

※　中途半端で変形が終わってしまう答案が多いので，簡約行列になるまでしっかり変形して下さい．

$$\underset{\text{簡約化未完状態}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{①+2\times②}{\longrightarrow} \underset{\text{簡約化未完状態}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{②+③}{\longrightarrow} \underset{\text{簡約化完了!}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

簡約行列かどうかは，上の 4 条件をチェックして下さい．

※　変形によって行列は別の行列になるので，等号で結ばないように!

※　1 回の変形で複数の種類の基本変形をしないで下さい．

※　簡約化の中で最も重要なのは (IV) の部分．**左から順に (IV) を目指して変形する**のが簡約化のコツ (例えば上の例では第 1 列目の第 2 行目を活かして，他の成分を 0 にし，後で行の入れ替えた)．

【問題 1】　以下の行列を簡約化し，その階数を求めよ．

(1)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3)　$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(4)　$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

(5)　$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

(6)　$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 5 \\ -4 & 10 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(7)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

(8)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(9)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(10)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ -2 & 3 & 5 & -7 & 8 \\ 4 & 19 & -7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & -8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

(11)　$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & 19 & -7 \\ 8 & -7 & -2 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & 10 & -3 \\ -5 & 4 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

【解答】 基本変形の仕方は一通りではなく，以下の解答はその一例である．ただし結果の簡約行列，及び階数は元の行列に対し一意に定まる．

(1) $A \xrightarrow[\text{①}-\text{②}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}-\text{①}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{②}]{} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}.$ 簡約化の結果より $\operatorname{rank} A = 2$ である．

(2) A は簡約行列なので変形の必要はない．$\operatorname{rank} A = 2$ である．

(3) $A \xrightarrow[\text{②}+2\times\text{①}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}\div 2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$ 簡約化の結果より $\operatorname{rank} A = 1$ である．

(4)

$$A \xrightarrow[\substack{\text{①}+2\times\text{②} \\ \text{③}-3\times\text{②}}]{} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}\div 6 \\ \text{②}\times(-1)}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}+5\times\text{①} \\ \text{③}+9\times\text{①}}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}\leftrightarrow\text{②}]{} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \therefore \quad \operatorname{rank} A = 2.$$

(5)

$$A \xrightarrow[\substack{\text{①}-\text{③} \\ \text{②}+2\times\text{③}}]{} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 4 & -9 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{③}-2\times\text{①}]{} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 14 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}\times 2 \\ \text{③}\times 2}]{} \begin{bmatrix} 2 & -12 & 14 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 28 & -40 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+3\times\text{②} \\ \text{③}-2\times\text{②}}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -13 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 23 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}\div 23]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -13 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+13\times\text{③} \\ \text{③}+9\times\text{③}}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}\div 2 \\ \text{②}\div 4}]{} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \therefore \quad \operatorname{rank} A = 3.$$

(6)

$$A \xrightarrow[\substack{\text{②}+4\times\text{③} \\ \text{④}+3\times\text{③}}]{} \begin{bmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 0 & 14 & -10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}\times 7]{} \begin{bmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 0 & 14 & -10 \\ 7 & 7 & -14 \\ 0 & 7 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}+2\times\text{①} \\ \text{③}+\text{①} \\ \text{④}+\text{①}}]{} \begin{bmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}\to\text{②} \\ \text{②}\to\text{③} \\ \text{③}\to\text{①}}]{} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -9 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}\div 7 \\ \text{②}\div(-7)}]{} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1 & -5/7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \therefore \quad \operatorname{rank} A = 2.$$

(7)

$$A \xrightarrow[\substack{\text{②}+\text{①} \\ \text{③}-3\times\text{①} \\ \text{④}-\text{①}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}+2\times\text{②} \\ \text{④}-\text{②}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}-3\times\text{④}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}+5\times\text{③} \\ \text{④}-\text{③}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}\leftrightarrow\text{③}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{②}\times(-1) \\ \text{③}\times(-1) \\ \text{④}\times(-1)}]{} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \therefore \quad \operatorname{rank} A = 4.$$

(8)

$$A \xrightarrow[\substack{\text{③}-5\times\text{①} \\ \text{④}-2\times\text{①} \\ \text{⑤}+3\times\text{①}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{⑤}+\times\text{③}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{④}\div(-5)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{①}-2\times\text{④} \\ \text{②}+\text{④} \\ \text{③}+4\times\text{④}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}-\text{③}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}\div(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{①}-2\times\text{②} \\ \text{③}+2\times\text{②} \\ \text{④}+\text{②}}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③}\div 2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{①}+\text{③}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{②}\leftrightarrow\text{④}]{} \underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \therefore \quad \operatorname{rank} A = 4.$$

(9)

$$A \xrightarrow[⑤-④]{} \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\1&1&1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{①-⑤\\②+2\times⑤\\③+3\times⑤\\④+4\times⑤}]{} \begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\0&1&2&3&4\\1&1&1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②-①\\③-①\\④-①\\⑤-①}]{} \begin{bmatrix}0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&-1&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①\to②\\②\to⑤\\⑤\to①}]{} \underline{\begin{bmatrix}1&0&-1&-2&-3\\0&1&2&3&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}} \qquad \therefore\quad \operatorname{rank} A = 2.$$

(10)

$$A \xrightarrow[\substack{②+2\times①\\③-4\times①\\④-5\times①}]{} \begin{bmatrix}1&2&-3&4&-5\\0&7&-1&1&-2\\0&11&5&-9&22\\0&-3&7&-11&26\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{②+2\times④\\③+4\times④}]{} \begin{bmatrix}1&2&-3&4&-5\\0&1&13&-21&50\\0&-1&33&-53&126\\0&-3&7&-11&26\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①-2\times②\\③+②\\④+3\times②}]{} \begin{bmatrix}1&0&-29&46&-105\\0&1&13&-21&50\\0&0&46&-74&176\\0&0&46&-74&176\end{bmatrix} \xrightarrow[④-③]{} \begin{bmatrix}1&0&-29&46&-105\\0&1&13&-21&50\\0&0&46&-74&176\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③\div 46]{} \begin{bmatrix}1&0&-29&46&-105\\0&1&13&-21&50\\0&0&1&-37/23&88/23\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{①+29\times③\\②-13\times③}]{} \underline{\begin{bmatrix}1&0&0&-15/23&137/23\\0&1&0&-2/23&6/23\\0&0&1&-37/23&88/23\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}} \qquad \therefore\quad \operatorname{rank} A = 3$$

(11)

$$A \xrightarrow[③-②]{} \begin{bmatrix}2&7&4&19&-7\\8&-7&-2&3&5\\1&9&5&7&-8\\-5&4&1&2&-3\end{bmatrix} \xrightarrow[②+④]{} \begin{bmatrix}2&7&4&19&-7\\3&-3&-1&5&2\\1&9&5&7&-8\\-5&4&1&2&-3\end{bmatrix} \xrightarrow[④+①,②]{} \begin{bmatrix}2&7&4&19&-7\\3&-3&-1&5&2\\1&9&5&7&-8\\0&8&4&26&-8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②-①]{} \begin{bmatrix}2&7&4&19&-7\\1&-10&-5&-14&9\\1&9&5&7&-8\\0&8&4&26&-8\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{①-2\times③\\②-③}]{} \begin{bmatrix}0&-11&-6&5&9\\0&-19&-10&-21&17\\1&9&5&7&-8\\0&8&4&26&-8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[②+(-1)\times①,\ ④]{} \begin{bmatrix}0&-11&-6&5&9\\0&0&0&0&0\\1&9&5&7&-8\\0&8&4&26&-8\end{bmatrix} \xrightarrow[①+④]{} \begin{bmatrix}0&-3&-2&31&1\\0&0&0&0&0\\1&9&5&7&-8\\0&8&4&26&-8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{③+3\times①\\④+3\times①}]{} \begin{bmatrix}0&-3&-2&31&1\\0&0&0&0&0\\1&0&-1&100&-5\\0&-1&-2&119&-5\end{bmatrix} \xrightarrow[①-3\times④]{} \begin{bmatrix}0&0&4&-326&16\\0&0&0&0&0\\1&0&-1&100&-5\\0&-1&-2&119&-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{③\times 4\\④\times 2}]{} \begin{bmatrix}0&0&4&-326&16\\0&0&0&0&0\\4&0&-4&400&-20\\0&-2&-4&238&-10\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{③+①\\④+①}]{} \begin{bmatrix}0&0&4&-326&16\\0&0&0&0&0\\4&0&0&74&-4\\0&-2&0&-88&6\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{①\div 4\\③\div 4\\④\div(-2)}]{} \begin{bmatrix}0&0&1&-163/2&4\\0&0&0&0&0\\1&0&0&37/2&-1\\0&1&0&44&-3\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{①\to③\\②\to④\\③\to①\\④\to②}]{} \underline{\begin{bmatrix}1&0&0&37/2&-1\\0&1&0&44&-3\\0&0&1&-163/2&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}} \qquad \therefore\quad \operatorname{rank} A = 3.$$