問題9.2 (P.192)

1. (1) $A=\begin{bmatrix}1&i&0\\-i&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ とおくと、$A^*=\overline{({}^tA)}=\overline{\begin{bmatrix}1&-i&0\\i&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1&i&0\\-i&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=A$

故えに、Aはエルミート行列である。

Aの固有多項式を$g_A(t)$とおくと

$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-i&0\\i&t-1&0\\0&0&t-2\end{vmatrix}=(t-2)(t^2-2t+1+i^2)=t(t-2)^2$ より、Aの固有値は 0, 2

$A\to\begin{bmatrix}1&i&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&i&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $A-2E_3=\begin{bmatrix}-1&i&0\\-i&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-i&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ となるので、

$W(0;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\middle|\,c\in\mathbb{C}\right\}$, $W(2;T_A)=\left\{a_1\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\,a_1,a_2\in\mathbb{C}\right\}$

ここで、$\left\{\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化すると、これはすでに全て直交しているので、

$\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}i\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-i\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ となる。(ノルムを1に揃えただけ)

$\therefore\ U=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}i&0&-i\\1&0&1\\0&\sqrt2&0\end{bmatrix}$ とすれば、Uはユニタリ行列で、$U^*A\cdot U=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ //

(2) $A=\begin{bmatrix}3&0&i\\0&2&0\\-i&0&1\end{bmatrix}$ とおくと、$A^*=\overline{({}^tA)}=\overline{\begin{bmatrix}3&0&-i\\0&2&0\\i&0&1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}3&0&i\\0&2&0\\-i&0&1\end{bmatrix}=A$

よって、Aはエルミート行列で、

$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-3&0&-i\\0&t-2&0\\i&0&t-1\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-3&-i\\i&t-1\end{vmatrix}=(t-2)(t^2-4t+3+i^2)=(t-2)(t^2-4t+2)$

$=(t-2)(t-(2+\sqrt2))(t-(2-\sqrt2))$

Aの固有値は 2, $2\pm\sqrt2$ より、

$A-2E_3=\begin{bmatrix}1&0&i\\0&0&0\\-i&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&i\\0&0&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A-(2+\sqrt2)E_3=\begin{bmatrix}1-\sqrt2&0&i\\0&-\sqrt2&0\\-i&0&-1-\sqrt2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1-\sqrt2&0&i\\0&1&0\\1&0&-i(1+\sqrt2)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-i(1+\sqrt2)\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A-(2-\sqrt2)E_3=\begin{bmatrix}1+\sqrt2&0&i\\0&\sqrt2&0\\-i&0&-1+\sqrt2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+\sqrt2&0&i\\0&1&0\\1&0&i(-1+\sqrt2)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&i(-1+\sqrt2)\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore W(2;T_A) = \left\{ a\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{C} \right\}$, $W(2+\sqrt{2};T_A) = \left\{ b\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{C} \right\}$

$W(2-\sqrt{2};T_A) = \left\{ c\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix} \middle| c\in\mathbb{C} \right\}$

ゆえに、$\left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix} \right\}$を(1)と同様に正規直交化すると、

$\left\{ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix} \right\}$となるので、

$u_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix}1+\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix}1-\sqrt{2}\\0\\-i\end{bmatrix}$とおき、$U = [u_1\ u_2\ u_3]$とすれば、

Uはユニタリ行列で、$U^*A\cdot U = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2+\sqrt{2}&0\\0&0&2-\sqrt{2}\end{bmatrix}$ //

2. (1) $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i&-1+i&0\\-1+i&1+i&0\\0&0&-2i\end{bmatrix}$とすると、

$$A^*A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1-i&-1-i&0\\-1-i&1-i&0\\0&0&2i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1+i&-1+i&0\\-1+i&1+i&0\\0&0&-2i\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2+2+0&2i-2i+0&0+0+0\\-2i+2i+0&2+2+0&0+0+0\\0+0+0&0+0+0&0+0+4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = E_3$$

ゆえに、Aはユニタリ行列である。また、

$$g_A(t) = \begin{vmatrix}t-\frac{1+i}{2}&\frac{1-i}{2}&0\\\frac{1-i}{2}&t-\frac{1+i}{2}&0\\0&0&t+i\end{vmatrix} = (t+i)\left\{t^2-(1+i)t+\frac{i}{2}+\frac{i}{2}\right\} = (t+i)(t^2-(1+i)t+i)$$
$$= (t+i)(t-i)(t-1)$$

よって、Aの固有値は、$1, \pm i$だから、

$$A-E_3 \to 2(A-E_3) = \begin{bmatrix}-1+i&-1+i&0\\-1+i&-1+i&0\\0&0&-2i-2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A-iE_3 \to 2(A-iE_3) = \begin{bmatrix}1-i&-1+i&0\\-1+i&1-i&0\\0&0&-4i\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A+iE_3 \to 2(A+iE_3) = \begin{bmatrix}1+3i&-1+i&0\\-1+i&1+3i&0\\0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}4&-4-8i&0\\-1+i&1+3i&0\\0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&-1-2i&0\\-1+i&1+3i&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(2-(1)のつづき)

$$\therefore W(1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{C}\right\},\ W(i;T_A)=\left\{b\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\middle|\, b\in\mathbb{C}\right\},\ W(-i;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{C}\right\}$$

ここで、$\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ を正規直交化すると $\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ となるので、

$U=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&1&0\\0&0&\sqrt2\end{bmatrix}$ とすれば U はユニタリ行列で $U^*AU=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{bmatrix}$ //

(2) $A=\frac14\begin{bmatrix}1+3i&0&\sqrt3(-1+i)\\0&2\sqrt2(1+i)&0\\\sqrt3(-1+i)&0&3+i\end{bmatrix}$ とすると

$$A^*A=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1-3i&0&\sqrt3(-1-i)\\0&2\sqrt2(1-i)&0\\\sqrt3(-1-i)&0&3-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+3i&0&\sqrt3(-1+i)\\0&2\sqrt2(1+i)&0\\\sqrt3(-1+i)&0&3+i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}10+0+6&0+0+0&\sqrt3(2+4i)+0+\sqrt3(-2-4i)\\0+0+0&0+16+0&0+0+0\\\sqrt3(-2-4i)+0+\sqrt3(2+4i)&0+0+0&6+0+10\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E_3$$ $\therefore$ Aはユニタリ行列

$$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-\frac{1+3i}{4}&0&\frac{\sqrt3}{4}(1-i)\\0&t-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)&0\\\frac{\sqrt3}{4}(1-i)&0&t-\frac{3+i}{4}\end{vmatrix}=\left(t-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\right)\left\{t^2-(1+i)t+\frac{5i}{8}+\frac{3i}{8}\right\}$$

$$=\left(t-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\right)\left(t^2-(1+i)t+i\right)$$

$$=\left(t-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\right)(t-1)(t-i)$$

$\therefore$ Aの固有値は、$1,\ i,\ \frac{\sqrt2}{2}(1+i)$ だから、

$$A-E_3\to 4(A-E_3)=\begin{bmatrix}-3+3i&0&\sqrt3(-1+i)\\0&2\sqrt2(1+i)-4&0\\\sqrt3(-1+i)&0&-1+i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\sqrt3&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A-iE_3\to 4(A-iE_3)=\begin{bmatrix}1-i&0&\sqrt3(-1+i)\\0&2\sqrt2(1+i)-4i&0\\\sqrt3(-1+i)&0&3-3i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\sqrt3\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)E_3\to 4\left(A-\frac{\sqrt2}{2}(1+i)E_3\right)=\begin{bmatrix}(1-2\sqrt2)+(3-2\sqrt2)i&0&\sqrt3(-1+i)\\0&0&0\\\sqrt3(-1+i)&0&(3-2\sqrt2)+(1-2\sqrt2)i\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore W(1;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{C}\right\}$, $W(i;T_A)=\left\{b\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{C}\right\}$,

$W(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \middle| c\in\mathbb{C}\right\}$

よって、$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$を正規直交化し、$\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$が得られるので、

$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & \sqrt{3} & 0\\0 & 0 & 2\\-\sqrt{3} & 1 & 0\end{bmatrix}$とおけば、$U$はユニタリ行列で、$U^*A\cdot U=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & i & 0\\0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\end{bmatrix}$ //

3. (1) $A=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}i\\\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$とすると、$A^*A=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}\\-\sqrt{2}i & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}i\\\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

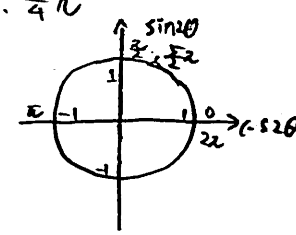
$A\cdot A^*=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}i\\\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}\\-\sqrt{2}i & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$

ゆえに、$A^*A=A\cdot A^*$となるので、Aは正規行列

$g_A(t)=\begin{vmatrix}t & -\sqrt{2}i\\-\sqrt{2} & t\end{vmatrix}=t^2-2i$　ここで、$\alpha^2-2i=0$を満たす$\alpha\in\mathbb{C}$を求める。

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leq\theta<2\pi)$とおくと、αは複素数全体を動く。
$\alpha^2=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$から、$\alpha^2=2\cdot(0+i\cdot1)$より、$r^2=2$, $\cos2\theta=0$, $\sin2\theta=1$

$r>0$より$r=\sqrt{2}$、$0\leq2\theta<4\pi$より、$2\theta=\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$だから、$\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$



ゆえに、$\alpha=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)$
$=1+i, -1-i$　となるので、

$g_A(t)=t^2-2i=(t-(1+i))(t+(1+i))$
よって、Aの固有値は$\pm(1+i)$となるので、

$A-(1+i)E_2=\begin{bmatrix}-1-i & \sqrt{2}i\\\sqrt{2} & -1-i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\\\sqrt{2} & -(1+i)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\\0 & 0\end{bmatrix}$

$A+(1+i)E_2=\begin{bmatrix}1+i & \sqrt{2}i\\\sqrt{2} & 1+i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\\\sqrt{2} & 1+i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\\0 & 0\end{bmatrix}$

(3-(1)のつづき)

従って、$W(1+i;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}1+i\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{C}\right\}$, $W(-1-i;T_A)=\left\{b\begin{bmatrix}1+i\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{C}\right\}$

ゆえに、$\left\{\begin{bmatrix}1+i\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1+i\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}$を正規直交化すると、$\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}$となるので、

$U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+i & 1+i\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$とすれば、$U$はユニタリ行列で、$U^*AU=\begin{bmatrix}1+i & 0\\ 0 & -1-i\end{bmatrix}$ //

(2) $A=\begin{bmatrix}i & 0 & 2\\ 0 & 2i & 0\\ -2 & 0 & i\end{bmatrix}$とおくと、$A^*A=\begin{bmatrix}-i & 0 & -2\\ 0 & -2i & 0\\ 2 & 0 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & 0 & 2\\ 0 & 2i & 0\\ -2 & 0 & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i^2+0+4 & 0 & -2i+0-2i\\ 0 & -4i^2 & 0\\ 2i+2i & 0 & 4-i^2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5 & 0 & -4i\\ 0 & 4 & 0\\ 4i & 0 & 5\end{bmatrix}$

$A\cdot A^*=\begin{bmatrix}i & 0 & 2\\ 0 & 2i & 0\\ -2 & 0 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-i & 0 & -2\\ 0 & -2i & 0\\ 2 & 0 & -i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i^2+0+4 & 0 & -2i-2i\\ 0 & -4i^2 & 0\\ 2i+2i & 0 & 4-i^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & -4i\\ 0 & 4 & 0\\ 4i & 0 & 5\end{bmatrix}$

ゆえに、$A\cdot A^*=A^*A$が成立するので、Aは正規行列

$g_A(t)=\begin{vmatrix}t-i & 0 & -2\\ 0 & t-2i & 0\\ 2 & 0 & t-i\end{vmatrix}=(t-2i)(t^2-2it+i^2+4)=(t-2i)(t^2-2it+3)=(t-2i)(t-3i)(t+i)$

ゆえに Aの固有値は$2i, 3i, -i$だから、

$A-2iE_3=\begin{bmatrix}-i & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2i\\ -2 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$A-3iE_3=\begin{bmatrix}-2i & 0 & 2\\ 0 & -i & 0\\ -2 & 0 & -2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$A+iE_3=\begin{bmatrix}2i & 0 & 2\\ 0 & 3i & 0\\ -2 & 0 & 2i\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -i\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ゆえに、$W(2i;T_A)=\left\{a\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \middle| a\in\mathbb{C}\right\}$, $W(3i;T_A)=\left\{b\begin{bmatrix}-i\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \middle| b\in\mathbb{C}\right\}$, $W(-i;T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}i\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \middle| c\in\mathbb{C}\right\}$

ここで、$\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-i\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$を正規直交化すると、$\left\{\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$

よって、$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i & i\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$とおくと、$U$はユニタリ行列で、$U^*AU=\begin{bmatrix}2i & 0 & 0\\ 0 & 3i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{bmatrix}$ //

4. (1).(2) ともに教科書の解答と同様

5. T_1, T_2をエルミート空間Vの正規変換とする。(T_1とT_2は可換)
問題7.2-5と同様に、T_1の固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ ($i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$),
λ_iに対するT_1の固有空間を$W(\lambda_i; T_1)$とする。
ここで、$W(\lambda_i; T_1)$はT_2-不変だから(T_1とT_2は可換) T_2の$W(\lambda_i; T_1)$への制限を$T_2|_i$とすると、T_2は正規変換なので、$T_2|_i$も正規変換

定理7.2.9(P.186)より、正規変換$T_2|_i$に対し、$W(\lambda_i; T_1)$の正規直交基で、$T_2|_i$の表現行列が対角行列であるようなものが存在する。
又それをΓ_iとすると、Γ_iは$W(\lambda_i; T_1)$の基底で、T_1は正規変換だから、
$i \neq j$のとき、$W(\lambda_i; T_1)$と$W(\lambda_j; T_1)$は直交するため、

$\Sigma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t\}$は$V$の正規直交基となる。

また、$T_2|_i(\Gamma_i) = \Gamma_i D_i$ (D_iは対角行列)とすると、
$T_2(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_t) = (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_t)(D_1 \oplus \cdots \oplus D_t)$かつ、

$T_1(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_t) = (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_t)(\lambda_1 E_{m_1} \oplus \cdots \oplus \lambda_t E_{m_t})$となるので、

T_1とT_2は共通の正規直交基Σで対角化される//

(補足) 一般に、Tをエルミート空間Vの正規変換とする。
このとき、Tの固有値λとλに対する固有ベクトルuに対し、($u \neq 0$)

$T(u) = \lambda u \iff T^*(u) = \bar{\lambda} u$が成り立つ。

∵ ($\Rightarrow$) Tは正規変換なので、$T^*T = TT^*$だから、定理7.2.7(P.154)より、
$T^*(u) = \alpha u$となる$\alpha \in \mathbb{C}$が存在し、

$\lambda(u, u) = (\lambda u, u) = (T(u), u) = (u, T^*(u)) = (u, \alpha u) = \bar{\alpha}(u, u)$

ここで、$u \neq 0$ (uは固有ベクトル)より、$(u, u) \neq 0$ ∴ $\lambda = \bar{\alpha}$ より、$\alpha = \bar{\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}$

∴ $T^*(u) = \alpha u = \bar{\lambda} u$
($\Leftarrow$)の証明も全く同様にできる。

(5の補足のつづき)

このことから、λ, μをTの異なる固有値とし、u, vをそれぞれTのλ, μに対する固有ベクトルとすると

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (T(u), v) = (u, T^*(v)) = (u, \bar{\mu} v) = \bar{\bar{\mu}}(u, v) = \mu(u, v)$$

ゆえに、今 $\lambda \neq \mu$ だから、$(u, v) = 0$　　すなわち、Tの固有値λ, μに対する固有空間を$W(\lambda; T)$, $W(\mu; T)$とおくと、$W(\lambda; T)$と$W(\mu; T)$は直交する。

次に、Vの部分空間WがT-不変であるとき、TのWへの制限$T|_W$は正規変換である。

∵ Tは正規変換としているので、定理9.2.9 (P.186)より、Tは対角化可能
よって、$T|_W$も対角化可能(問7.2-5の解答を参照)

ゆえに、Wは$T|_W$の全ての固有空間の直和で表せ、$T|_W$の固有値λ, μに対する固有空間は、Tの固有空間の部分空間となるので、$\lambda \neq \mu$ならばそれらは直交する。($T|_W$の固有多項式はTの固有多項式を割りきるので、$T|_W$の固有値はTの固有値にもなっている。また、$T|_W$の固有ベクトルはTの固有ベクトルでもある)

ゆえに、$T|_W$の各固有空間内の正規直交基を全て合わせたものは<u>$T|_W$の固有ベクトルからなるWの正規直交基</u>となる。それを$\{u_1, \cdots, u_k\}$とする。
($T|_W(u_i) = \lambda_i u_i$, λ_iは$T|_W$の固有値)

ここで、$T|_W(u_i) = T(u_i)$より、$T(u_i) = \lambda_i u_i$だから、$T^*(u_i) = \bar{\lambda}_i u_i$をみたす。

よって、$\forall u \in W$とすると、$u = c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k$と表せて、($c_i \in \mathbb{C}$)

$$T^*(u) = c_1 T^*(u_1) + \cdots + c_k T^*(u_k) = c_1 \bar{\lambda}_1 u_1 + \cdots + c_k \bar{\lambda}_k u_k$$

ゆえに、$T^*(u)$は$\{u_1, \cdots, u_k\}$の1次結合で表せるので、$T^*(u) \in W$
∴ WはT*-不変であるから、その制限を$(T^*)|_W$とすると、

$\forall u_i \in \{u_1, \cdots, u_k\}$に対し、$(T^*)|_W \cdot T|_W(u_i) = T|_W (T^*)|_W(u_i) = \lambda_i \bar{\lambda}_i u_i$となるので、
$T|_W$と$(T^*)|_W$は可換

また，$^\forall v, ^\forall w \in W$ とすると，$v = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k$，$w = b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k$ と表せて，

$$(T|_W(v), w) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i (u_i, b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i \overline{b_i} \lambda_i$$

$$(v, (T^*)|_W(w)) = \sum_{i=1}^{k} \overline{b_i}\, \overline{\overline{\lambda_i}} (a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k, u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \overline{b_i} \lambda_i \quad (a_i, b_i \in \mathbb{C})$$

ゆえに，$(T|_W(v), w) = (v, (T^*)|_W(w))$ をみたすので，$(T^*)|_W$ は $T|_W$ の随伴変換となり，$(T^*)|_W = (T|_W)^*$ である。

このことと，先程の $T|_W$ と $(T^*)|_W$ が可換であることを合わせれば，$T|_W$ と $(T|_W)^*$ が可換となるので，$T|_W$ は正規変換である〃

6．T をエルミート空間 V の正規変換とする。

(1) ($\Rightarrow$) 定理 9.2.2 で証明済み。

($\Leftarrow$) T は正規変換なので，定理 9.2.9 より，T の固有ベクトルからなる V の正規直交基が存在する。
それを $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ($T(u_i) = \lambda_i u_i$，λ_i は T の固有値) とすると，

T は正規変換より，$T(u_i) = \lambda_i u_i \Rightarrow T^*(u_i) = \overline{\lambda_i} u_i$ で，今，仮定から，
T の固有値 λ_i は全て ($i = 1, 2, \ldots, k$) 実数だから，$\overline{\lambda_i} = \lambda_i$

すなわち，$T^*(u_i) = \lambda_i u_i$ となる。
よって，$^\forall x \in V$ とすると，$x = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$ と表せ，($c_i \in \mathbb{C}$)

$T(x) = c_1 \lambda_1 u_1 + \cdots + c_n \lambda_n u_n = T^*(x)$ となるので，$T = T^*$
ゆえに，T はエルミート変換〃

(2) ($\Rightarrow$) T の任意の固有値を λ とすると，$^\exists u \in V - \{0\}$ s.t. $T(u) = \lambda u$ ($\lambda \in \mathbb{C}$)
また，T は正規変換より $T^*(u) = \overline{\lambda} u$

仮定から，T はユニタリ変換だから，$T^* T = I_V$
ここで，$T^* T(u) = T^*(T(u)) = T^*(\lambda u) = \lambda \cdot T^*(u) = \lambda \cdot \overline{\lambda} u = |\lambda| \cdot u$

また，$I_V(u) = u$ であるから，$|\lambda| \cdot u = u$

(6-(2)-(⇒)のつづき)

ゆえに、$(|\lambda|-1)u=0$ だが、$u\neq 0$ より $|\lambda|-1=0$ すなわち $|\lambda|=1$ となる。
λ は T の任意の固有値としているので、T の全ての固有値の絶対値は1となる複素数である。

(⇐) T は正規変換だから、定理9.2.9より T の固有ベクトルからなる正規直交基 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ ($T(u_i)=\lambda_i u_i$、λ_i は T の固有値)が存在する。

T は正規変換より、$T^*(u_i)=\overline{\lambda_i}u_i$ をみたし、$\forall i=1,2,\cdots,n$ に対し、

$$T^*T(u_i)=T^*(T(u_i))=T^*(\lambda_i u_i)=\lambda_i T^*(u_i)=\lambda_i\overline{\lambda_i}u_i=|\lambda_i|u_i$$

ここで、仮定より、T の固有値の絶対値は1だから $|\lambda_i|=1$

ゆえに、$T^*T(u_i)=u_i=I_V(u_i)$ をみたすので $T^*T=I_V$

∴ T はユニタリ変換である。

7. 教科書の解答と同様(定理9.2.15(P.191)の証明過程を用いる)