問題9.1 (P.180)

1. (1) $\left\|\begin{bmatrix}2+3i\\-1+i\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(2+3i)(2-3i)+(-1+i)(-1-i)} = \sqrt{4+9+1+1} = \sqrt{15}$ //

(2) $\left\|\begin{bmatrix}1+2i\\-5-i\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{(1+2i)(1-2i)+(-5-i)\cdot(-5+i)} = \sqrt{1+4+25+1} = \sqrt{31}$ //

2. (1) $\left(\begin{bmatrix}1+i\\2-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2-3i\\1+2i\end{bmatrix}\right) = (1+i)(2+3i)+(2-i)(1-2i) = (-1+5i)+(-5i) = -1$ //

(2) $\left(\begin{bmatrix}i\\1-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1+2i\\3-i\end{bmatrix}\right) = i(1-2i)+(1-i)(3+i) = (2+i)+(4-2i) = 6-i$ //

3. (1) $\left(\begin{bmatrix}3+i\\1+i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2-i\\-5\end{bmatrix}\right) = (3+i)(2+i)+(1+i)(-5) = (6+5i+i^2)+(-5-5i) = 0$

ゆえに, ${}^t[3+i \;\; 1+i]$ と ${}^t[2-i \;\; -5]$ は直交する //

(2) $\left(\begin{bmatrix}-1+i\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}i\\1-i\end{bmatrix}\right) = (-1+i)(-i)+(-1)(1+i) = (1+i)-(1+i) = 0$

ゆえに, ${}^t[-1+i \;\; -1]$ と ${}^t[i \;\; 1-i]$ は直交する //

4. $\left(\begin{bmatrix}1-i\\3\\8-i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1+2i\\-i\end{bmatrix}\right) = (1-i)\cdot 2 + 3\cdot(-1-2i)+(8-i)\cdot i$

$= 2-2i-3-6i+8i+1 = 0$

ゆえに, ${}^t[1-i \;\; 3 \;\; 8-i]$ と ${}^t[2 \;\; -1+2i \;\; -i]$ は直交する //

5. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1\overline{b_1}+3a_2\overline{b_2} = [a_1 \; a_2]\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{b_1}\\\overline{b_2}\end{bmatrix} = {}^t\mathbf{a}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\overline{\mathbf{b}}$ と変形できる。

まず, これが $\mathbb{C}^2$ のエルミート内積であることを示す。

$\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{C}^2$, $c \in \mathbb{C}$, $A = \begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ に対し, $\left(\mathbf{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)$

$(\mathbf{u}+\mathbf{u}', \mathbf{v}) = {}^t(\mathbf{u}+\mathbf{u}')A\overline{\mathbf{v}} = ({}^t\mathbf{u}+{}^t\mathbf{u}')A\overline{\mathbf{v}} = {}^t\mathbf{u}A\overline{\mathbf{v}} + {}^t\mathbf{u}'A\overline{\mathbf{v}}$
$= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}', \mathbf{v})$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{v}') = {}^t\mathbf{u}\cdot A\overline{(\mathbf{v}+\mathbf{v}')} = {}^t\mathbf{u}\cdot A(\overline{\mathbf{v}}+\overline{\mathbf{v}'}) = {}^t\mathbf{u}A\overline{\mathbf{v}} + {}^t\mathbf{u}\cdot A\overline{\mathbf{v}'}$
$= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}')$

$(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t(c\mathbf{u})A\overline{\mathbf{v}} = c\,{}^t\mathbf{u}A\overline{\mathbf{v}} = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}\cdot A\overline{(c\mathbf{v})} = {}^t\mathbf{u}\cdot A(\overline{c}\,\overline{\mathbf{v}}) = \overline{c}\cdot{}^t\mathbf{u}\cdot A\overline{\mathbf{v}} = \overline{c}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = v_1\overline{u_1} + 3v_2\overline{u_2} = \overline{u_1}v_1 + 3\overline{u_2}v_2 = \overline{u_1\overline{v_1} + 3u_2\overline{v_2}} = \overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$

$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ならば, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = u_1\overline{u_1} + 3u_2\overline{u_2} = |u_1|^2 + 3|u_2|^2 > 0$

ゆえに, P.174のエルミート内積の4条件をみたすので, これは$\mathbb{C}^2$のエルミート内積である。

また, ${}^t[1\ i], {}^t[1-i\ \ 2] \in \mathbb{C}^2$ に対し, 標準エルミート内積を用いると,

$({}^t[1\ i], {}^t[1-i\ \ 2]) = 1(1+i) + i\cdot 2 = 1+3i$ となるが, 先程のエルミート内積を用いると,

$({}^t[1\ i], {}^t[1-i\ \ 2]) = 1\cdot(1+i) + 3\cdot i\cdot 2 = 1+7i \neq 1+3i$ となるので,
これは標準エルミート内積でない。

6. $\{\mathbf{u}_1, \cdots \mathbf{u}_n\}$はVの正規直交基底なので, 特にVの基底であるから, $^\forall \mathbf{v} \in V$に対し,

$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n\ (c_i \in \mathbb{C}, i=1, 2, \cdots, n)$ と表せる。ここで, $\mathbf{v}$と$\mathbf{u}_k\ (1 \leq k \leq n)$のエルミート内積をとると,

$(\mathbf{v}, \mathbf{u}_k) = (c_1\mathbf{u}_1 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k + \cdots + c_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k) = c_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k) + \cdots + c_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k) + \cdots + c_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_k)$
$= c_1\cdot 0 + \cdots + c_k\cdot 1 + \cdots + c_n\cdot 0 = c_k$

ゆえに, $c_k = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)$ となるので, Vの任意のベクトル$\mathbf{v}$は$(\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)$の値によって決まる。

7. (1) $x\in(W_1+W_2)^\perp$ とすると、$\forall v\in W_1+W_2$ に対し $(x,v)=0$
また、$\forall v_1\in W_1$, $\forall v_2\in W_2$ とすると $W_1, W_2\subset W_1+W_2$ より
$(x,v_1)=(x,v_2)=0$ よって、$x\in W_1^\perp$ かつ $x\in W_2^\perp$
すなわち $x\in W_1^\perp\cap W_2^\perp$ だから、$(W_1+W_2)^\perp\subset W_1^\perp\cap W_2^\perp$

逆に $x\in W_1^\perp\cap W_2^\perp$ とすると、$x\in W_1^\perp$ かつ $x\in W_2^\perp$ より $\forall v_1\in W_1$, $\forall v_2\in W_2$ に対し
$(x,v_1)=(x,v_2)=0$

ここで $\forall v\in W_1+W_2$ とすると、$\exists w_1\in W_1$, $\exists w_2\in W_2$ s.t. $v=w_1+w_2$
$\therefore (x,v)=(x,w_1+w_2)=(x,w_1)+(x,w_2)=0+0=0$
ゆえに、$x\in(W_1+W_2)^\perp$ より $W_1^\perp\cap W_2^\perp\subset(W_1+W_2)^\perp$

以上から、$(W_1+W_2)^\perp=W_1^\perp\cap W_2^\perp$ //

(2) 一般に V が無限次元のときは、成立するとは限らないので、
V が有限次元のときに成立することを示す。

$U_1=W_1^\perp$, $U_2=W_2^\perp$ とすると、7-(1)の等式から、$(U_1+U_2)^\perp=U_1^\perp\cap U_2^\perp$ が成立する。
今、V は有限次元なので、定理9.1.4より $((U_1+U_2)^\perp)^\perp=U_1+U_2$ とできるので、

$U_1+U_2=(U_1^\perp\cap U_2^\perp)^\perp$ いま、$U_1=W_1^\perp$, $U_2=W_2^\perp$ としているので、

$$W_1^\perp+W_2^\perp=((W_1^\perp)^\perp\cap(W_2^\perp)^\perp)^\perp=(W_1\cap W_2)^\perp \quad (\because (W_1^\perp)^\perp=W_1,\ (W_2^\perp)^\perp=W_2)$$

ゆえに、$(W_1\cap W_2)^\perp=W_1^\perp+W_2^\perp$ が有限次元内で成立する //

(無限次元のときは、$W=(W^\perp)^\perp$ が成立するとは限らず、一般には、$W\subset(W^\perp)^\perp$ である。)

8. W_1 と W_2 の正規直交基をそれぞれ $\{v_1,\dots,v_t\}$, $\{w_1,\dots,w_s\}$ とする。

まず、W_1 と W_2 が直交すると仮定する。
射影子の定義から、(P.178) $\forall x\in V$ に対し

$$I_1I_2(x)=I_1(I_2(x))=I_1\left(\sum_{j=1}^{s}(x,w_j)w_j\right)=\sum_{j=1}^{s}(x,w_j)I_1(w_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\left((x,w_j)\cdot\sum_{i=1}^{t}(w_j,v_i)v_i\right)$$ で、

今、仮定から、W_1とW_2は直交しているので、$^\forall v_1 \in W_1$、$^\forall v_2 \in W_2$に対し、
$(v_1, v_2) = 0$となる。
よって、特に$u_i \in W_1$、$w_j \in W_2$ $(1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s)$であるから、$(w_j, u_i) = 0$

$$\therefore\ I_1 \cdot I_2(x) = \sum_{j=1}^{s}\left((x, w_j) \cdot \sum_{i=1}^{t}(w_j, u_i)u_i\right) = \sum_{j=1}^{s}\left((x, w_j) \cdot \sum_{i=1}^{t} 0 \cdot u_i\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\left((x, w_j) \cdot 0\right) = 0$$

ゆえに、xはVの任意の元だから、$I_1 \cdot I_2$はVの零変換である。
$\therefore\ I_1 \cdot I_2 = 0$

次に、$I_1 \cdot I_2 = 0$と仮定する。

$^\forall x \in V$に対し、$I_1 I_2(x) = \sum_{j=1}^{s}\left((x, w_j) \cdot \sum_{i=1}^{t}(w_j, u_i)u_i\right)$ かつ、$0(x) = 0$

ゆえに、$\sum_{j=1}^{s}\left((x, w_j) \cdot \sum_{i=1}^{t}(w_j, u_i)u_i\right) = 0$ が$^\forall x \in V$で成立している。

よって、xにw_k $(1 \leq k \leq s)$を代入してもOK $(w_k \in W_2 \subset V)$

ここで、
$$\sum_{j=1}^{s}(w_k, w_j) = (w_k, w_1) + (w_k, w_2) + \cdots + (w_k, w_k) + \cdots + (w_k, w_s)$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 1 + \cdots + 0 = 1$$ より、

$$\sum_{j=1}^{s}\left((w_k, w_j) \cdot \sum_{i=1}^{t}(w_j, u_i)u_i\right) = \sum_{i=1}^{t}(w_k, u_i)u_i$$
$$= (w_k, u_1)u_1 + (w_k, u_2)u_2 + \cdots + (w_k, u_t)u_t$$

したがって、$(w_k, u_1)u_1 + (w_k, u_2)u_2 + \cdots + (w_k, u_t)u_t = 0$で、
今、$\{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$は$W_1$の基だから、$\mathbb{C}$上1次独立で、$(w_k, u_i) \in \mathbb{C}$だから、

$$(w_k, u_1) = (w_k, u_2) = \cdots = (w_k, u_t) = 0 \quad (1 \leq k \leq s)$$

ゆえに、$(w_k, u_i) = 0$が$1 \leq {}^\forall k \leq s$、$1 \leq {}^\forall i \leq t$で成立しているので、

$$(\underbrace{a_1 w_1 + \cdots + a_s w_s}_{\in W_2}, \underbrace{b_1 u_1 + \cdots + b_t u_t}_{\in W_1}) = 0 \quad (a_k, b_i \in \mathbb{C})$$

したがって、W_1とW_2は直交する。//