問題8.1 (P.162)

一般に $A\in M_n(\mathbb{C})$ の固有多項式を、$g_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$ と $\mathbb{C}$ 上で因数分解したときに、Aの固有値 λ_i に対する準固有空間は、

$\widetilde{W}(\lambda_i;T_A)=\ker(T_A-\lambda_i I)^{m_i}=\{x\in\mathbb{C}^n \mid (T_A-\lambda_i I)^{m_i}(x)=0\}$ とできる。

(証明はここではしない。Aを$\mathbb{C}$ベクトルの空間の線形変換におきかえても同様のことがいえる)

つまり、λ_i の重複度 m_i によって、$(A-\lambda_i E_n)^{m_i}$ の核空間が準固有空間として定められる。問1.2.3でこれを使い、問4では定理8.1.1を用いる。

1. $g_A(t)=\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 2\\ -2 & t-1 & 1\\ 0 & 0 & t-1\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-1&0\\-2&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$

よって、Aの固有値は $\lambda=1$ で、$\widetilde{W}(1;T_A)=\ker(A-E_3)^3$ だが、

ケーリー・ハミルトンの定理より、$g_A(A)=(A-E_3)^3=O_3$

ゆえに、$\widetilde{W}(1;T_A)=\ker O_3=\mathbb{C}^3$ //

2. $g_A(t)=\begin{vmatrix} t-2 & 0 & 0\\ -2 & t-5 & -3\\ 0 & 6 & t+4\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t-5&-3\\6&t+4\end{vmatrix}=(t-2)(t^2-t-2)=(t-2)^2(t+1)^1$

よって、Aの固有値は 2, −1

$A+E_3=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&6&3\\0&-6&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1/2\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore \widetilde{W}(-1;T_A)=\ker(A+E_3)^1=\left\{c\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{C}\right\}$

$(A-2E_3)^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&3&3\\0&-6&-6\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&3&3\\0&-6&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&3&3\\0&-6&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\6&-4&-4\\-12&18&18\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-3&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$\therefore \widetilde{W}(2;T_A)=\ker(A-2E_3)^2=\left\{c_1\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}\middle| c_1,c_2\in\mathbb{C}\right\}$ //

3. $g_A(t)=\begin{vmatrix} t-4 & 0 & -6\\ 0 & t-1 & 0\\ 3 & 0 & t+5\end{vmatrix}=(t-1)\begin{vmatrix}t-4&-6\\3&t+5\end{vmatrix}=(t-1)(t^2+t-2)=(t-1)^2(t+2)^1$

ゆえに、Aの固有値は 1, −2

$(A-E_3)^2=\begin{bmatrix}3&0&6\\0&0&0\\-3&0&-6\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-9&0&-18\\0&0&0\\9&0&18\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

よって、$\widetilde{W}(1;T_A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\middle| c_1,c_2\in\mathbb{C}\right\}$

$A+2E_3=\begin{bmatrix}6&0&6\\0&3&0\\-3&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $\therefore W(-2;T_A)=\ker(A+2E_3)^1=\left\{c\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{C}\right\}$ //

4. (1) $g_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & t-5 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & t+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t-2 & -2 & -1 \\ 0 & t-5 & -3 \\ 0 & 6 & t+4 \end{vmatrix} = (t+1)(t-2)\begin{vmatrix} t-5 & -3 \\ 6 & t+4 \end{vmatrix}$

$= (t+1)(t-2)(t^2-t-2) = (t+1)^2(t-2)^2 = (t-2)^2(t+1)^2$

ゆえに、Aの固有値は 2, −1 で重複度はどちらとも 2 //

(2) $g_1(t)f_1(t)+g_2(t)f_2(t)=1$ の両辺を $f_1(t)\cdot f_2(t)$で割ると、

$\dfrac{g_1(t)}{f_2(t)} + \dfrac{g_2(t)}{f_1(t)} = \dfrac{1}{f_1(t)\cdot f_2(t)}$ ここで、$\dfrac{1}{f_1(t)\cdot f_2(t)} = \dfrac{1}{(t+1)^2\cdot(t-2)^2}$ より、

これを部分分数分解する。

つまり $\dfrac{at+b}{(t-2)^2} + \dfrac{ct+d}{(t+1)^2} = \dfrac{1}{(t+1)^2(t-2)^2}$ となる a, b, c, dを求める。

$(左辺) = \dfrac{(a+c)t^3+(2a+b-4c+d)t^2+(a+2b+4c-4d)t+(b+4d)}{(t+1)^2(t-2)^2}$ だから、

$a+c=0$, $2a+b-4c+d=0$, $a+2b+4c-4d=0$, $b+4d=1$ を解くと、

$(a, b, c, d) = \left(-\frac{2}{27}, \frac{7}{27}, \frac{2}{27}, \frac{5}{27}\right)$ より、

$\dfrac{-\frac{2}{27}t+\frac{7}{27}}{(t-2)^2} + \dfrac{\frac{2}{27}t+\frac{5}{27}}{(t+1)^2} = \dfrac{1}{(t+1)^2(t-2)^2}$ つまり $\dfrac{-\frac{2}{27}t+\frac{7}{27}}{f_2(t)} + \dfrac{\frac{2}{27}t+\frac{5}{27}}{f_1(t)} = \dfrac{1}{f_1(t)\cdot f_2(t)}$

ゆえに、$g_1(t) = \frac{1}{27}(-2t+7)$, $g_2(t) = \frac{1}{27}(2t+5)$ とすればよい //

(3) (2)で求めた $g_1(t), g_2(t)$ と $f_1(t), f_2(t)$を用いる。

$g_1(A)\cdot f_1(A) = \frac{1}{27}(-2A+7E_4)(A+E_4)^2 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore \widetilde{W}(2; T_A) = \mathrm{Im}(g_1(A)\cdot f_1(A)) = \left\{ c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}$

$g_2(A)\cdot f_2(A) = \frac{1}{27}(2A+5E_4)(A-2E_4)^2 = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^2 = \cdots$

(4-(3)のつづき)

$$g_2(A)f_2(A) = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって. $\widetilde{W}(-1;T_A) = \mathrm{Im}(g_2(A)\cdot f_2(A)) = \left\{ d_1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| d_1, d_2 \in \mathbb{C} \right\}$ //

5. A_iの次数をn_iとおく$(i=1,2,\cdots,k)$

$k=2$のとき, $A=A_1\oplus A_2$で, $P_{A_1}(t)$と$P_{A_2}(t)$は共通因子をもたないので. 定理7.2.2(P.150)より.

ある多項式$g_1(t)$. $g_2(t)$が存在し, $g_1(t)P_{A_1}(t)+g_2(t)P_{A_2}(t)=1$となる。

$P_{A_1}(A_1)=O_{n_1}$. $P_{A_2}(A_2)=O_{n_2}$だから.

$g_1(A_1)P_{A_1}(A_1)+g_2(A_1)P_{A_2}(A_1)=E_{n_1}$ つまり. $g_2(A_1)P_{A_2}(A_1)=E_{n_1}$

$g_1(A_2)P_{A_1}(A_2)+g_2(A_2)P_{A_2}(A_2)=E_{n_2}$ つまり. $g_1(A_2)P_{A_1}(A_2)=E_{n_2}$

仮定より. $B_i=f_i(A_i)$と表せるので. $f(t)=f_1(t)g_2(t)P_{A_2}(t)+f_2(t)g_1(t)P_{A_1}(t)$とおくと.

$$f(A_1)=f_1(A_1)g_2(A_1)P_{A_2}(A_1)+f_2(A_1)g_1(A_1)P_{A_1}(A_1)$$
$$=f_1(A_1)\cdot E_{n_1}+f_2(A_1)\cdot O_{n_1}=f_1(A_1)$$
$$f(A_2)=f_1(A_2)g_2(A_2)P_{A_2}(A_2)+f_2(A_2)g_1(A_2)P_{A_1}(A_2)$$
$$=f_1(A_2)\cdot O_{n_2}+f_2(A_2)\cdot E_{n_2}=f_2(A_2)$$

よって. 問7.2-3で最初に示したこと$(f(A)=f(B)\oplus f(C))$から.

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & O \\ O & f(A_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(A_1) & O \\ O & f_2(A_2) \end{bmatrix}=f_1(A_1)\oplus f_2(A_2)=B_1\oplus B_2$$

よって. $k=2$のとき. $B=B_1\oplus B_2$はAの多項式で書ける。

次に, $k=3$のとき. $A=A_1\oplus A_2\oplus A_3$で. $A_{12}=A_1\oplus A_2$とすると.

定理7.2.2より. A_{12}の最小多項式は$P_{A_1}(t)$と$P_{A_2}(t)$の最小公倍多項式で,

いま. 仮定から. $P_{A_1}(t)$と$P_{A_2}(t)$は共通因子をもたないので$A_{12}=A_1\oplus A_2$の最小多項式は $P_{A_1}(t)\cdot P_{A_2}(t)$である。

また. 再び仮定より. $P_{A_1}(t)$. $P_{A_2}(t)$. $P_{A_3}(t)$の任意の2つは共通因子をもたないから. $P_{A_1}(t)\cdot P_{A_2}(t)$と$P_{A_3}(t)$は共通因子をもたない.

したがって、$A_{12} = A_1 \oplus A_2$ より、$k=2$ のときと同じ操作を行えば、
$f_{12}(A_{12}) = f_1(A_1) \oplus f_2(A_2) = B_1 \oplus B_2$ となる f_{12} が存在し、
$A = A_{12} \oplus A_3$ で、A_{12} と A_2 の最小多項式は共通因子をもたないので、
もう一度 $k=2$ のときと同じ操作を行い、

$$f(A) = f_{12}(A_{12}) \oplus f_3(A_3) = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$$ となる f が作れる。

次に、$k-1 (\geq 2)$ までで、$g(A') = f_1(A_1) \oplus \cdots \oplus f_{k-1}(A_{k-1}) = B_1 \oplus \cdots \oplus B_{k-1}$ となる g が存在すると仮定する。($A' = A_1 \oplus \cdots \oplus A_{k-1}$ とおいた)

$A' = A_1 \oplus \cdots \oplus A_{k-1}$ の最小多項式を $P_{A'}(t)$ とすると、問7.2-3 (P.156) より、
$P_{A'}(t)$ は $P_{A_1}(t), \cdots, P_{A_{k-1}}(t)$ の最小公倍多項式である。
(一般に問7.2-3は A が3つ以上の正方行列の直和で表されているときも同様に成立することが証明できる)
また、仮定より、$P_{A_1}(t), \cdots, P_{A_{k-1}}(t)$ は共通因子をもたないので、
$P_{A'}(t) = P_{A_1}(t) \cdots P_{A_{k-1}}(t)$ である。

再び仮定より、$P_{A_1}(t), \cdots, P_{A_{k-1}}(t), P_{A_k}(t)$ は共通因子をもたないので、
$P_{A'}(t)$ と $P_{A_k}(t)$ は共通因子をもたない。

ゆえに、$A = A' \oplus A_k$ であるから、$k=2$ のときと同様の操作を行うと、
$f(A) = g(A') \oplus f_k(A_k)$ となる f が構成できて、

$$f(A) = g(A') \oplus f_k(A_k) = (B_1 \oplus \cdots \oplus B_{k-1}) \oplus B_k = B_1 \oplus \cdots \oplus B_{k-1} \oplus B_k$$

以上より、k のときも $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_{k-1} \oplus B_k$ が A の多項式で表されることが示せたので、$\forall k \geq 2$ で問題文の主張は成立する //