問題7.2 (p.156)

1.(1) $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ とすると、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は W_1+W_2 の生成系で、

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

よって、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は $\mathbb{R}$ 上1次独立より W_1+W_2 の基で、$\dim(W_1+W_2)=3=\dim\mathbb{R}^3$,
$W_1\cap W_2=\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}\cap\mathrm{span}\{\mathbf{b}\}=\{\mathbf{0}\}$ より。$\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$ //

(2) $\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ とすると、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は W_1+W_2 の生成系で、

$$[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

よって、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は $\mathbb{R}$ 上1次独立より、$\dim(W_1+W_2)=3=\dim\mathbb{R}^3$
$W_1\cap W_2=\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}\cap\mathrm{span}\{\mathbf{b}\}=\{\mathbf{0}\}$ だから、$\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$ //

(3) $W_2=\left\{\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_2=x_3=0\right\}$ とできて、 $W_1=\mathrm{Ker}\,T=\left\{\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1-x_2+2x_3=0\right\}$ より、

$$W_1\cap W_2=\left\{\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix}x_1-x_2+2x_3=0\\x_2=x_3=0\end{matrix}\right\}$$

これを解くと、$x_1=x_2=x_3=0$ だから、$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ $\therefore W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$

また、$\mathrm{rank}\,T=1$ より、$\mathrm{null}\,T=\dim\mathbb{R}^3-\mathrm{rank}\,T=3-1=2$ $\therefore W_1$ の次元は2

$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ を W_1 の基とし、 $\mathbf{b}={}^t[1\ 0\ 0]$ とおくと、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は W_1+W_2 の生成系

$c_1, c_2, c\in\mathbb{R}$ に対し、

$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+c\mathbf{b}=\mathbf{0}$ とすると、$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2=-c\mathbf{b}$

ところが、$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2\in W_1$, $-c\mathbf{b}\in W_2$ より、$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2=-c\mathbf{b}\in W_1\cap W_2=\{\mathbf{0}\}$

$\therefore$ $c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2=-c\mathbf{b}=\mathbf{0}$ $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は W_1 の基 から、$\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ より
$c_1=c_2=c=0$ つまり、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は $\mathbb{R}$ 上1次独立

ゆえに、$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$ は W_1+W_2 の基だから、$\dim(W_1+W_2)=3=\dim\mathbb{R}^3$

$\therefore$ $\mathbb{R}^3=W_1\oplus W_2$ //

(補足) Vを体$\mathbb{K}$上n次元線形空間, W_1, W_2をVの部分空間で, W_1, W_2の基を各々
$\{\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_m\}$, $\{\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l\}$ とおくと. 次が成立する。 $(m, l \leq n)$

$\{\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_m, \mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l\}$が$\mathbb{K}$上1次独立 $\Leftrightarrow$ $W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\}$ すなわち. $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

先程の1の(1), (2)は これを用いた。

一応証明をしておく

$(\Rightarrow)$ $\mathbb{u} \in W_1 \cap W_2$とすると. $\mathbb{u} \in W_1$かつ$\mathbb{u} \in W_2$で. $\{\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_m\}$及び$\{\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l\}$は$W_1$と$W_2$の基
であるから. $c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{K}$を用いて
$\mathbb{u} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_m\mathbb{a}_m$, $\mathbb{u} = d_1\mathbb{b}_1 + \cdots + d_l\mathbb{b}_l$ と表せる。

ゆえに. $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_m\mathbb{a}_m + (-d_1)\mathbb{b}_1 + \cdots + (-d_l)\mathbb{b}_l = \mathbb{0}$ となり. 仮定から. $\{\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_m, \mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l\}$は
$\mathbb{K}$上1次独立であるため. $c_1 = \cdots = c_m = -d_1 = \cdots = -d_l = 0_K$
$\therefore$ $c_1 = \cdots = c_m = d_1 = \cdots = d_l = 0_K$であるから. $\mathbb{u} = \mathbb{0}$ つまり. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\}$

$(\Leftarrow)$ $c_1, \cdots, c_m, d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{K}$に対し. $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_m\mathbb{a}_m + d_1\mathbb{b}_1 + \cdots + d_l\mathbb{b}_l = \mathbb{0}$とすると.
$W_1 \ni c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_m\mathbb{a}_m = (-d_1)\mathbb{b}_1 + \cdots + (-d_l)\mathbb{b}_l \in W_2$ となるので.
$c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_m\mathbb{a}_m = (-d_1)\mathbb{b}_1 + \cdots + (-d_l)\mathbb{b}_l \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\}$

よって. $c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_m\mathbb{a}_m = \mathbb{0}$かつ, $(-d_1)\mathbb{b}_1 + \cdots + (-d_l)\mathbb{b}_l = \mathbb{0}$
$\{\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_m\}$と$\{\mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l\}$は$W_1$, W_2の基であるから. 特に$\mathbb{K}$上1次独立
$\therefore$ $c_1 = \cdots = c_m = d_1 = \cdots = d_l = 0_K$
したがって. $\{\mathbb{a}_1, \cdots, \mathbb{a}_m, \mathbb{b}_1, \cdots, \mathbb{b}_l\}$は$\mathbb{K}$上1次独立 $\square$

($0_K \in \mathbb{K}$は 体$\mathbb{K}$の加法単位元 (零元) である。詳しくは代数学で)

2. $V/U = \{cl(\mathbb{v}) \mid \mathbb{v} \in V\}$, $W_i/U = \{cl(\mathbb{w}_i) \mid \mathbb{w}_i \in W_i\}$ $(i = 1, 2)$ とおく。

W_1, W_2はVの部分空間より. $W_1, W_2 \subset V$だから. $W_1/U, W_2/U \subset V/U$をみたす。
$\therefore$ $(W_1/U) + (W_2/U) \subset V/U$

$cl(\mathbb{v}) \in V/U$とすると. $\mathbb{v} \in V$で. 仮定より. $V = W_1 \oplus W_2$なので,
$^\exists \mathbb{w}_1 \in W_1$, $^\exists \mathbb{w}_2 \in W_2$ s.t. $\mathbb{v} = \mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2$
よって. $cl(\mathbb{v}) = cl(\mathbb{w}_1 + \mathbb{w}_2) = cl(\mathbb{w}_1) + cl(\mathbb{w}_2) \in (W_1/U) + (W_2/U)$
すなわち. $V/U \subset (W_1/U) + (W_2/U)$

したがって、$V/U = (W_1/U) + (W_2/U)$ が示せた。

次に、$cl(x) \in (W_1/U) \cap (W_2/U)$ とすると、$cl(x) \in W_1/U$ かつ $cl(x) \in W_2/U$
よって、$x \in W_1$ かつ $x \in W_2$ より、$x \in W_1 \cap W_2$
ここで、仮定より $V = W_1 \oplus W_2$ より、$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ すなわち、$x = 0$ だから、
$cl(x) = cl(0)$ （$cl(0)$ は V/U における零ベクトル）

つまり、$(W_1/U) \cap (W_2/U) = \{cl(0)\}$ だから、$V/U = (W_1/U) \oplus (W_2/U)$

3. B, C は正方行列なので、${}^\forall m \in \mathbb{N}$ に対し、

$$A^m = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} B^m & O \\ O & C^m \end{bmatrix}$$ が成立するため、

任意の多項式 $f(t) = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \cdots + d_n t^n$ に対し、$1 \mapsto E_{k+l}$, $t \mapsto A$ とすると、

$$f(A) = d_0 E_{k+l} + d_1 A + d_2 A^2 + \cdots + d_n A^n$$

$$= d_0 \begin{bmatrix} E_k & O \\ O & E_l \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{bmatrix} + \cdots + d_n \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_0 E_k + d_1 B + d_2 B^2 + \cdots + d_n B^n & O \\ O & d_0 E_l + d_1 C + d_2 C^2 + \cdots + d_n C^n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(B) & O \\ O & f(C) \end{bmatrix}$$ とできる。

このとき、$g(t)$ を $P_B(t)$ と $P_C(t)$ の最小公倍多項式とすると、
$P_B(t) \mid g(t)$，$P_C(t) \mid g(t)$ より、$g(B) = O_k$ かつ $g(C) = O_l$

$$\therefore\ g(A) = \begin{bmatrix} g(B) & O \\ O & g(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_k & O \\ O & O_l \end{bmatrix} = O_{k+l}$$

よって、$g(t)$ は A の零化多項式だから $P_A(t) \mid g(t)$，つまり、$\deg P_A(t) \leq \deg g(t)$

また、$P_A(t)$ は A の最小多項式より、$P_A(A) = O_{k+l}$ であるが、

$$P_A(A) = \begin{bmatrix} P_A(B) & O \\ O & P_A(C) \end{bmatrix}$$ ともかけるので、$P_A(B) = O_k$, $P_A(C) = O_l$

$\therefore$ $P_A(t)$ は、B と C の零化多項式でもあるから、$P_B(t) \mid P_A(t)$ かつ $P_C(t) \mid P_A(t)$
ゆえに、$P_A(t)$ は特に $P_B(t)$ と $P_C(t)$ の公倍多項式となるが、
$g(t)$ は $P_B(t)$ と $P_C(t)$ の最小公倍多項式だから、$\deg g(t) \leq \deg P_A(t)$

(3のつづき)

ゆえに、$\deg p_A(t) = \deg g(t)$ かつ $p_A(t) \mid g(t)$ となり、
$g(t)$ は $p_B(t)$ と $p_C(t)$ の(最小)公倍多項式より、$g(t)$ の最高次の係数は1
($p_B(t)$, $p_C(t)$ は各々 B.C の最小多項式なので、最高次の係数は両方1)
よって、$p_A(t) = g(t)$ となり、$p_A(t)$ は $p_B(t)$ と $p_C(t)$ の最小公倍多項式である。//

4. $g_A(t)$, $p_A(t)$ をそれぞれ、A の固有多項式、最小多項式とする。

(1) $g_A(t) = (t-2)^4(t-5)$ より、$p_A(t)$ は $g_A(t)$ を割りきり、A の固有値全て(2と5)を根にもつので、$(t-2)^k(t-5)$ $(k=1.2.3.4)$ のいずれか1つが $p_A(t)$ になる

$$(A-2E_5)(A-5E_5) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3&1&0&0&0 \\ 0&-3&1&0&0 \\ 0&0&-3&0&0 \\ 0&0&0&-3&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&-3&1&0&0 \\ 0&0&-3&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \neq O_5$$

$$(A-2E_5)^2(A-5E_5) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&-3&1&0&0 \\ 0&0&-3&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&-3&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \neq O_5$$

$$(A-2E_5)^3(A-5E_5) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&-3&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = O_5$$

$\therefore\ p_A(t) = (t-2)^3(t-5)$ //

(2) $g_A(t) = (t-3)^5$ より、$p_A(t)$ は $(t-3)^k$ $(k=1.2.3.4.5)$ のいずれか1つ

$$(A-3E_5) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad (A-3E_5)^2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad (A-3E_5)^3 = O_5$$

$\therefore\ p_A(t) = (t-3)^3$ //

5. T_1, T_2 を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間 V の線形変換とする。

T_1 の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ ($i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$)、$T_1$ の固有値 λ_i に対する固有空間を $W(\lambda_i; T_1)$ とする。

ここで、$\forall x \in W(\lambda_i; T_1)$ に対し、$T_1(x) = \lambda_i x$ で T_1, T_2 は可換だから、

$T_2 \cdot T_1(x) = T_2 \cdot (\lambda_i x) = \lambda_i \cdot T_2(x)$ かつ $T_2 \cdot T_1(x) = T_1 \cdot T_2(x) = T_1(T_2(x))$

ゆえに、$T_1(T_2(x)) = \lambda_i \cdot T_2(x)$ より、$T_2(x) \in W(\lambda_i ; T_1)$
これは $W(\lambda_i ; T_1)$ の T_2 による像 $T_2(W(\lambda_i ; T_1))$ は $W(\lambda_i ; T_1)$ に含まれている
ことを意味する。(このことを、$W(\lambda_i ; T_1)$ は T_2ー不変(安定)などとよぶ)
よって、T_2 を $W(\lambda_i ; T_1)$ に制限した線形変換を考えられる。
これを $T_2|_i$ とすると、$T_2|_i : W(\lambda_i ; T_1) \to W(\lambda_i ; T_1)$ とできる。

T_2 は対角化可能なので、T_2 の固有値を $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s$ ($k \neq l \Rightarrow \mu_k \neq \mu_l$) とすると、
T_2 の最小多項式は、$P_{T_2}(t) = (t-\mu_1)(t-\mu_2)\cdots(t-\mu_s)$ と互いに異なる
1次式の積で表せて、更に、T_2 の制限 $T_2|_i$ の最小多項式は T_2 の最小
多項式を割り切る。ゆえに、$T_2|_i$ の最小多項式も互いに異なる1次式の積で
表すことができるので、$T_2|_i$ も対角化可能 ($\forall i = 1, 2, \cdots, t$)

すなわち、$W(\lambda_i ; T_1)$ の基底で $T_2|_i$ の表現行列が対角行列となるものが
存在し、これを Γ_i とすると、T_1 は対角化可能なので、V は

$V = W(\lambda_1 ; T_1) \oplus W(\lambda_2 ; T_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_t ; T_1)$ と固有空間の直和で表せる

$\therefore \{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t\}$ は V の基底で、Γ_i は $W(\lambda_i ; T_1)$ の基でもあるから、

$$T_1(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t) = (\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t)(\lambda_1 E_{m_1} \oplus \lambda_2 E_{m_2} \oplus \cdots \oplus \lambda_t E_{m_t})$$

と $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t\}$ は T_1 に対角行列を与える。 ($n = m_1 + m_2 + \cdots + m_t$)

また、$T_2(\Gamma_i) = T_2|_i(\Gamma_i) = \Gamma_i D_i$ (D_i は対角行列) とできるから、

$$T_2(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t) = (\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t)(D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_t)$$

と $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t\}$ は T_2 に対角行列を与える。

以上から、T_1 と T_2 は V の同一の基 $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_t\}$ により、表現行列がともに
対角行列にできる//

(補足) 一般に T を $\mathbb{C}$ 上の V の線形変換とする。

- T が対角化可能 $\Leftrightarrow$ T の最小多項式は互いに異なる1次式の積で表せる。
  $\Leftrightarrow$ V は T の全ての固有空間の直和で表せる。

(5.の補足の続き)

○ Vの部分空間WがT-不変ならば，その制限を$T|_W$としたときに，
$T|_W$の最小多項式はTの最小多項式を割り切る。
(固有多項式に関しても同様の関係が成立する。)

5.では上の2つの命題を用いた。